

第2章 これまでのマランゴニ液柱対流研究

松本 聡・藤村 薫・今石 宣之・鴨谷 康弘・上野 一郎・西野 耕一

History of Marangoni Research before MEIS

Satoshi MATSUMOTO, Kaoru FUJIMURA, Nobuyuki IMAISHI,
Yasuhiro KAMOTANI, Ichiro UENO and Koichi NISHINO

2.1 概要

2.1.1. はじめに

流体力学は、液体や気体の流れにおける複雑な振る舞いの中に規則性を見だし、そのメカニズムを説き明かす学問分野である。流体の支配方程式であるナビエ・ストークス方程式は 19 世紀前半に導かれ、学問として非常に成熟しているが、対象は時代と共に広がっていき、現在では理学および工学における基礎を成している。そのため、物理、数学、気象、海洋、生物、航空、宇宙、船舶、機械、化学、土木など幅広い分野との関わりが深く、その中から新たな現象が見いだされ共に発展してきた。特に、非線形力学の観点に立つと、流体力学は非線形モデルとして好適であったことから、ローレンツモデルのように力学系理論の具体的な現象として流体挙動が用いられた。

先にも述べたように、非圧縮粘性流体の挙動を記述する支配方程式は、連続の式およびナビエ・ストークス方程式である¹⁻³⁾。

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{v} は速度ベクトル、 t は時間、 ρ は密度、 ν は動粘性係数である。(1) 式が質量保存則であり、(2) 式が運動方程式となる。この方程式に問題に合わせた境界条件を適用することで、流体の振る舞いが解き明かされるのである。このような、一見シンプルな方程式で、複雑な流体の挙動が記述されることは驚きである。ただし、非線形性の強い方程式であり解くのは一筋縄ではいかない。

流体力学における安定性に関する基本的概念は 19 世紀にはほぼ確立し、特に Reynolds の論文は流体不安定性の先駆的な研究で、すでに 100 年以上もの歴史があるが、流体挙動の複雑性、多様性から完全に解決したとは言いがたい。実験、解析の手段が進歩しメカニズムを考察し理論的理解が進

むと、また新たな未知の側面が現れてきたりする。

宇宙環境利用では、浮力対流抑制効果を活用し、単純化した状態で現象の解明を目的とした研究が多くなされ、そのことから流体力学は結晶成長、凝固、燃焼などと強く結びついて中核的な役割を果たしている。

ここでは、幅広い流体力学の中から流れの安定性に関する研究について、宇宙環境利用の観点から、特に液柱マランゴニ対流における不安定性問題について述べることにする。

2.1.2. 流体力学的安定性とは

実際に自然界において観察される流体现象は安定でなくてはならない。その際、僅かな乱れが生じてももとの状態に再び戻ることが必要で、ある状態が繰り返し観察されることと安定性が関連している。状態を表すパラメータには安定性の限界（臨界値）があり、臨界値を越えると不安定になる。不安定な状態では、一般に、複数の不安定モードが成長しその中で自発的に新しい状態が選択される。すなわち、対流の駆動力を大きくするに従い、不安定性を増し、それまでの状態が維持されず、新たな状態へと移り変わってゆく、“流れの安定性と遷移”が重要な課題となる。

流れの状態を層流と乱流に分けることがあるが、その境界をどのように定義するかはいまだに明確ではない。一般的に、層流とはその名称のとおり流れが層を形成しているような規則的な流れの形態であり、乱流とは速度が時間的・空間的に不規則に変動する不規則な流れをいう。流れの駆動力は制御パラメータ (R) により記述され、R が非常に大きくなると乱流となる。流れは制御パラメータを大きくしてゆくと、臨界値を越えたときに不安定となり、より複雑なパターンの流れへと移行する。一般的には、R がゼロから大きくなるに従い、(1) 静止状態、(2) 定常流、(3) 周期的振動流、(4) カオス流、(5) 乱流と状態を変える。一例として、液柱マランゴニ対流の遷移を Fig. 1 に模式的に示す。液柱マランゴニ対流の遷移過程については、現在研究が盛んになされているが、高プラントル数流体と低プラントル数流体では決定的に

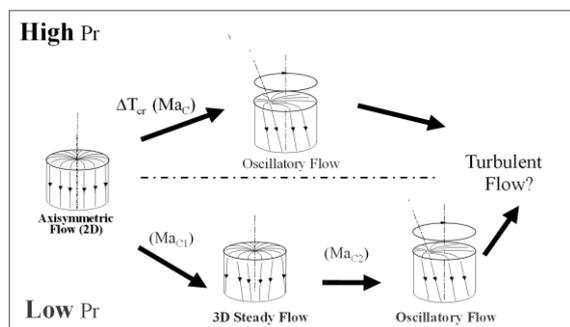


Fig.1 Transition process of Marangoni convection in liquid bridge configuration.

違うプロセスを経る。それは、低プラントル数流体における3次元定常流の存在である。

では、流れの安定性と遷移に関する研究の目的は何であろうか。一つは、制御パラメータを増していったときの遷移条件（臨界値）を正確に決定すること。二つ目に、遷移後の状態においてどのような対流パターンが出現するかを決定すること。最終的には、安定性と遷移の特徴づけをし、遷移のメカニズムをあきらかにすることにある。以降には研究手法を簡単に列挙する。

(1) 実験

自然現象を対象とする流体力学にあつては、実験により観察することの重要性は疑う余地もない。実験で観測された事実を基に理論構築を図り、あるいは仮説とした理論を検証する手段でもある。実験での観測は、流れの可視化が様々な方法を用いて行われる⁴⁻⁷⁾。また、熱輸送を含む熱流体現象の場合には温度計測も重要なデータである。速度、温度データ等のFFT (Fast Fourier Transform) 解析、MEM (Maximum Entropy Method) 解析⁸⁾、ウェーブレット解析⁹⁾等によるモード判定が行われる。また、微小なトレーサ粒子を混入した流体中に超音波を発信し、その反射エコーを得ることにより、速度プロファイルを捉え、その時系列変化から遷移シナリオを捉える研究も行われている。

(2) 数値解析

ナビエ・ストークス方程式は非線形偏微分方程式であり、その厳密解は特殊な条件のもと以外では得られない。そこで、支配方程式を離散化し、離散点の値を逐次求める数値解析が行われる。数値流体力学¹⁰⁾と呼ばれるように、流体力学における数値解析の役割は非常に重要である。特に1980年代以降、解析手法の改善、計算機能力の目覚ましい向上により、様々な流れをシミュレートすることが可能になった。最近では3次元フルモデルにおける直接数値解析が行われ、実験研究と同等の重要性を持つようになった。そのことから、実験に即した数値解析を実施することにより結果を直接対比し、メカニズム解明に大きな寄与を果たす段階に達した。

(3) 理論

(a) 線形安定性理論

流れの制御パラメータを変化させることによりナビエ・ストークス方程式の平衡解の個数が変化することを解の分岐という。分岐点（臨界値）は平衡解の線形安定性を調べることで知ることができる。線形安定性理論は、流れの安定性を調べる理論解析であり、基本流に対して微小な摂動を加えたときに、その摂動が発達するのか、あるいは減衰するかによりその流れの安定性を判定する。微小な摂動がどのように時間発展するかに着目することから、運動方程式や境界条件の中で変動量の積（2次の項）などは無視し、擾乱に対して線形化を行う。線形安定性理論による解析が、流体力学安定性の理論解析の第一歩である。

(b) 非線形理論

前述の線形安定性理論の上にとつて、微小擾乱の主な非線形効果を取り入れた理論が弱非線形理論である。擾乱が有限振幅を持つようになると線形理論で無視していた擾乱方程式の非線形項が重要になる。擾乱振幅が有限ではあるが十分小さいときには、力学系の次元を数学的に矛盾無く有限でうち切ることが可能である。このように、次元の低減を行うことによって擾乱の消長を調べる理論が弱非線形安定性理論である。逆に、擾乱振幅が大きく次元の低減が不可能である場合、強非線形安定性理論が必要になるが、理論はまだ構成されておらず、数値解析によって支配方程式を解くことが現在では唯一可能な解法である。

(c) 分岐やカオスの定性的理論

制御パラメータが大きくなると、やがて流れは非常に複雑になり、カオス的な流れから最終的には乱流へと至る。すなわち、不安定の発現により分岐が起こりそのたびに異なった状態へと遷移を繰り返し乱流へと至ると考えられている。分岐やカオスの理論によりその状態の遷移を、定性的にはあるが説明することが可能になってきた。

2.1.3. 液柱マランゴニ対流不安定性の現状

2.1.3.1 マランゴニ対流について

マランゴニ対流の歴史は非常に古く、17世紀位から観察が始まり、この現象を初めて科学的な解明を行ったのが19世紀後半のThomsonやMarangoniである。その後、1950年代から60年代にその実験的・理論的研究が進められ、70年代に微小重力環境での実験を契機に「微小重力場における現象」として新たな観点から注目されるようになった。それに伴い、多くの宇宙実験が行われてきた(Fig. 2)¹¹⁾。また、近年のコンピュータの発達により、界面と内部流動を同時に取り扱うことが可能となり、数値解析による現象解明も行われるようになった。液柱マランゴニ対流に関する研究は、初期段階は海外の研究者により始められたものの、日本の研究者が情熱を傾け多くの成果を創出している。

以上のような過去の研究を通じ、様々な流れのパターンを有することが明らかにされてきた。対流の駆動力が小さい場合には定常流れであるが、駆動力が大きくなる

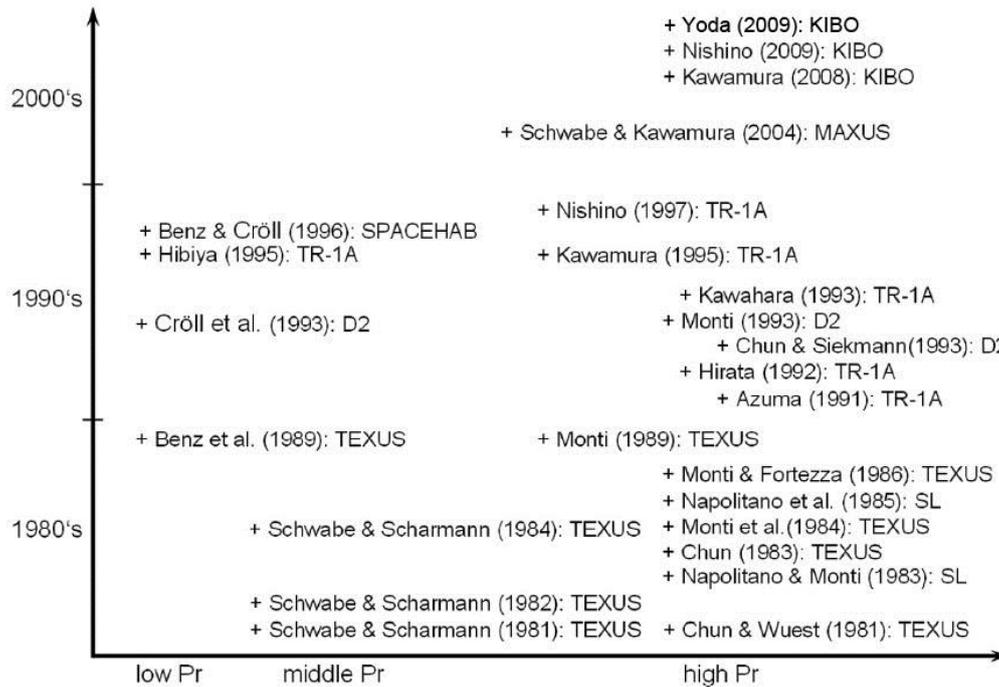


Fig.2 The history of the microgravity experiments (modified from Ref. 11).

と流体的不安定性が発達し、振動流に遷移することや、振動流の中にも様々な様相が観察された。振動流に遷移する条件はこれまで、表面張力勾配と粘性応力の比を表す無次元パラメータであるマランゴニ数 (Ma) で整理されるといわれてきた。

$$Ma = \frac{(\partial\sigma/\partial T)\Delta T L}{\mu\alpha} \quad (3)$$

ここで、 σ , T , ΔT , L , μ , α はそれぞれ表面張力, 温度, 温度差, 代表長さ, 粘性係数, 温度伝導率である。マランゴニ数がある臨界値を越えると振動流が発生するとされてきた。しかし、最近の実験結果を整理すると臨界マランゴニ数 (Ma_c) は一定ではなく、液柱の直径に依存する傾向が見られた (Fig. 3)。これは、マランゴニ数だけでは振動流遷移条件が決定されないことを示唆している。また、プラントル数 Pr の大小により振動流に至るプロセスが異なることが分かってきた (Fig. 1)。

そのことから、広範なプラントル数における横断的研究がマランゴニ対流の体系的な解明にとって必須である。宇宙航空研究開発機構では平成 8 年度より、チーム研究により液柱マランゴニ対流の不安定性問題に取り組んできた¹²⁾。

2.1.3.2 低プラントル数流体

液体金属に代表される低 Pr 数流体は、融点が比較的高く、表面酸化防止のために超高清浄に保つ必要がある等の実験的困難さから、現状では実験的研究がほとんど無い。また、不透明流体であることから流れの直接観察が困難なため、流れ場の把握が非常に難しい。これまでの研究として、Croell *et al.*¹³⁾ による半導体結晶中の不純物

縞の乱れからの間接的な観察、Kou *et al.*¹⁴⁾ による液柱スズの表面温度振動の検出報告例が散見されるが、振動流遷移条件や遷移後の流れの形態は未だ明らかとされていない。さらに、Azami *et al.*¹⁵⁾ による、第二遷移点を遙かに超えた条件で熔融シリコンの観察が行われているが、振動流遷移条件は未だ解明されていない。

Takagi *et al.*¹⁶⁾ は、液体スズの液柱表面の酸化物の挙動を観察し、振動流遷移点を明確に捉えた。その後、Matsumoto *et al.*¹⁷⁾ は、精密な温度測定により振動流遷移の振動挙動を明らかにし、Imaishi *et al.*¹⁸⁻²⁰⁾ の数値解析結果との比較を行った。数値解析は、実験に即した条件で計算が行われ、振動流開始後の遷移パターンが実験と非常によく一致した結果を得た。しかし、実験による温度測定では、流れのパターンについては明確ではなく、今後超音波による流れ場の観察が計画されており、より多くの情報が得られることが期待される。また、低プラントル数流体に特有の第一遷移点については、温度変化が非常に小さくこれまでに捉えた例は全く無かった。しかし、我々の研究では振動流に遷移するより小さい温度差において温度ジャンプを捕捉しており、第一臨界点 (Ma_{c1}) が観察できたものと考えている。

熔融状態の金属や半導体などの低プラントル数流体 ($Pr \ll 1$) においては、線形安定性解析 (Linear Stability Analysis; LSA)^{21,22)} と直接数値シミュレーションにより、二次元定常流から三次元定常流に遷移した後には振動流へ遷移することが予測され、地上での実験において現象が検証されつつある。

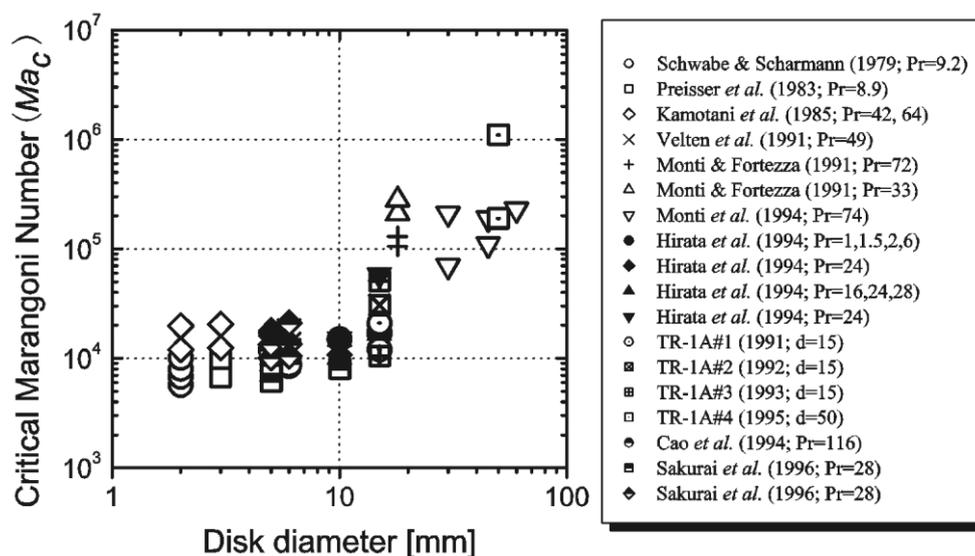


Fig. 3 Dependence of critical Marangoni number on size of liquid bridge.

乱流に至る過程においては、Azami *et al.*¹⁵⁾の研究があるが、系統的な研究には至っておらず今後の実験データの蓄積が望まれる。また、数値解析では、まだ乱流までの計算はなされていない。

2.1.3.3 高プラントル数流体

一方、高プラントル数流体 ($Pr > 10$) では、ハーフゾーンを模擬した実験的研究、特にシリコンオイル等の高プラントル数流体を用いた地上実験が数多く実施されてきた。加えて、ここ約 20 年間の間に、およそ 20 件以上にも及ぶ液柱マランゴニ対流に関する微小重力実験が、スペースシャトルや小型ロケットにて実施されてきている。これらの結果より、マランゴニ対流の駆動力、つまり上下ディスク間温度差が大きくなるにつれ、流れが二次元定常流から三次元振動流へと遷移することが明らかとなっている。しかし、振動流遷移メカニズムは完全には理解されていない。従来、多くの研究者は流体の線形安定性に起因するものとしてこの遷移現象を捉え、遷移の臨界条件が臨界マランゴニ数 (Ma_c) だけで決定できるとされてきた。しかしながら近年の宇宙実験データからは、振動流遷移点における臨界マランゴニ数が、液柱径を大きくするにつれ増大することを示している。このことは、臨界マランゴニ数だけでは振動流遷移条件を決定できないことを強く示唆している。同様の結果が液柱以外の形状のマランゴニ対流でも得られている。また、LSA では振動流遷移過程を現状では説明できておらず、さらに、直接数値シミュレーションでも高プラントル数流体の振動流は完全には解明されていない。このように、高プラントル数流体のマランゴニ対流に関する多くの研究結果が報告されているものの、振動流遷移メカニズムは完全に理解されているとはいえない。

以上のことは、振動遷移の臨界条件を決定するための

新たなパラメータが必要であることを意味する。Kamotani *et al.* は、動的自由表面変形がその新たなパラメータであり、S-パラメータと呼ばれる自由界面変形の要素を導入した²³⁾。S-パラメータは数少ない既存のデータの臨界条件をよく記述しているが、動的界面変形が実際に重要な役割を果たしていることを、地上実験で直接的に証明することは非常に難しい。そのため、国際宇宙ステーション (ISS) におけるマランゴニ対流実験を計画しており、その宇宙実験により振動流メカニズムにおける動的表面変形の役割を明らかにする。

高プラントル流体における振動流発生後の乱流に至るプロセスは、Ueno *et al.* により系統的に調べられている²⁴⁾。定常流から乱流に至る過程を、トレーサ粒子挙動、表面温度変動を解析し 8 つの領域に特徴づけ、それぞれの領域で現れる流れのモード構造を明らかにしている。また、Tanaka *et al.*²⁵⁾ は、乱流へ至る過程においてある特定の条件において、流体中に特異な粒子集合を見だし、流れ場と粒子との関係において非常に興味深い。この粒子挙動は Schwabe *et al.*²⁶⁾ によっても観察されており、PAS (Particle Accumulation Structure) と呼ばれている。また、Shiomi *et al.*²⁷⁾ により、不安定性の能動的制御が試みられている。

2.2 物理モデル

2.2.1 液柱マランゴニ対流の線形・弱非線形安定性解析

2.2.1.1 はじめに

シリコン単結晶作製法の一つとして、フローティングゾーン法と呼ばれる方法が知られているが、この方法では結晶材料が溶けるつぼなど他物質と接することがないため、

不純物の混入を防ぐことができるという利点がある。しかし、気液界面の表面張力の温度勾配によって駆動されるマランゴニ対流が不安定化されるために、均質な単結晶を得ることができないことが明らかになり、液柱マランゴニ対流の安定性の問題に関心が集まるようになった。本節では、過去 30 年にわたって行われてきた安定性に対する解析に焦点をあて、解析手法の概要を述べ、得られた結果を概説する。フローティングゾーンをモデル化したフルゾーンモデル (FZ) と、さらにそれを単純化したハーフゾーンモデル (HZ) の両者を Fig. 4 に示すが、一般的な流れの安定性問題とは異なり、この問題では数値解析の占める割合が非常に大きい。なお、紙面の関係で、液柱の高さ h に対する半径 r^* の比、すなわちアスペクト比 ($\Gamma=h/r^*$) はとくに断らない限り 1 に限定することにしよう。

2.2.1.2 問題の定式化

支配方程式として、Navier-Stokes 方程式、エネルギー方程式と連続方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \pi + Pr \Delta \mathbf{u} - Pr^2 Gr T \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \Delta T \text{ and } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

が液柱内

$$\Omega = \{(r, \theta, z) | r \in [0, \Gamma^{-1}], \theta \in [0, 2\pi], z \in (-1/2, 1/2)\}$$

で成立する。方程式(4)は、代表長として液柱高さ h 、代表時間として温度拡散の時間スケール h^2/κ 、代表速度として κ/h 、代表圧力は $\rho \kappa^2/h^2$ を用いて無次元化している¹。 $\mathbf{u}=(u,v,w)$ は速度ベクトル、 π は圧力、 T は温度である。 ρ は密度、 κ は温度拡散率であり、HZ の場合には液柱上下面の温度をそれぞれ T_h, T_c ($T_h > T_c$) とおいた。FZ の場合には側面を通過する熱流束から代表温度を決める。な

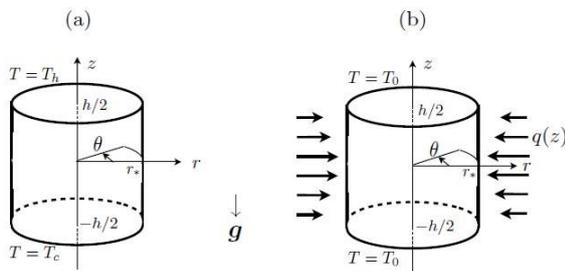


Fig. 4 Physical Setup. (a): Half-zone model (HZ), (b): full-zone model (FZ). g: acceleration due to gravity, $q(z)$ heat Flux.

お、(4)式における $Pr = \nu/\kappa$ はプラントル数であり、 $Gr = -Pr^{-1}Ra$ はグラスホフ数である。なお、 $Ra = \frac{\beta g (T_h - T_c) h^3}{\nu \kappa}$ で与えられるレイリー数は、安定成層に対して $Ra > 0$ と定義されているので、便宜上グラスホフ数 Gr を $Gr = -Pr^{-1}Ra$ で定義している。 ν は動粘性率、 β は体積膨張率、 g は重力加速度である。定義域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は液柱の上下端面 $\{(r, \theta, z) | r \in [0, \Gamma^{-1}], \theta \in [0, 2\pi], z = \pm 1/2\}$ と液柱表面 $\{(r, \theta, z) | r = \Gamma^{-1}, \theta \in [0, 2\pi], z \in (-1/2, 1/2)\}$ から構成されるが、上下端面では粘着条件と完全伝導条件、液柱表面では無変形、表面張力と接線応力のバランス、部分的伝導という境界条件を課す：

$$u = 0 \text{ at } z = \pm 1/2, T = T_h \text{ at } z = 1/2,$$

$$T = T_c \text{ at } z = -1/2,$$

$$u = 0, \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} - Pr \cdot Re \nabla_{\parallel} T = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} + Bi T = 0 \text{ on } r = \Gamma^{-1}. \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{S} は応力テンソルであり、 Re は表面張力 \mathcal{S} を用いて $Re = \frac{(-\partial \mathcal{S} / \partial T)(T_h - T_c) h}{\rho \nu^2}$ で定義されるレイノルズ数である。なお、マランゴニ数 Ma とは $Ma = Pr Re$ の関係がある。 Bi はビオ数である。

まず、(4)は境界条件(5)のもとに、 $Re \neq 0$ である限り、つねに軸対称定常解（主流）を持つ²。Stokes の流れ関数 $\Psi(\mathbf{r})$: $\bar{\mathbf{u}} = r^{-1} \Psi_z(\mathbf{r})$, $\bar{\mathbf{w}} = -r^{-1} \Psi_r(\mathbf{r})$ を導入する。ここに $\mathbf{r} = (r, z)$ とおいた。圧力を消去すると Ψ と \bar{T} は次によって支配される：

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(\Psi, D^2 \Psi)}{\partial(r, z)} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} D^2 \Psi = Pr D^4 \Psi + Pr^2 Gr \cdot r \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r}, \quad (6)$$

$$D^2 \bar{\theta} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + 1 \right) \right],$$

$$D^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \text{ ここで } \bar{\theta}(\mathbf{r}) = \bar{T} - z \text{ とおいた.}$$

境界条件(5)は次のようになる：

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_z = \bar{\theta} = 0 \text{ on } z = \pm \frac{1}{2}, \\ \Psi = 0, -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + Pr Re (\bar{\theta}_z + 1) = 0, \\ \bar{\theta}_r = 0 \text{ on } r = \Gamma^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 \mathbf{u}, π, T を主流成分 ($\bar{\cdot}$) と攪乱成分 ($\hat{\cdot}$) に分離しよう： $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, $\pi(\mathbf{x}, t) = \bar{\pi}(\mathbf{x}) + \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}) + \hat{\theta}(\mathbf{x}, t)$. $\mathbf{x} = (r, \theta, z)$ とおいた。攪乱成分に対する非線形方程式は次の形に書ける：

¹ 方程式の無次元化の仕方にはいろいろなバリエーションがあり、代表時間に粘性散逸の時間スケール h^2/ν を用いるのが低プラントル数流体の場合には一般的である。また、代表速度に $(-\partial \mathcal{S} / \partial T)(T_h - T_c) / (\rho \nu)$ 、代表圧力に $(-\partial \mathcal{S} / \partial T)(T_h - T_c) / h$ という表面張力 \mathcal{S} 由来のスケールを用いることもできる。どの流儀を用いても、臨界条件は変わらないが、攪乱の線形増幅率や周波数は代表時間の取り方に依存する。

² 主流は θ 方向の回転対称性と $\theta=0$ に関する鏡映対称性という $O(2)$ 対称性をもつ。また、FZ の場合、浮力の影響を無視すると、 $O(2)$ 対称性に加えて $z=0$ に関する上下鏡映対称性が付加された $O(2) \oplus Z_2$ 対称性をもつ。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S}\hat{\psi} + \mathcal{L}\hat{\psi} = \mathcal{N}(\hat{\psi}, \hat{\psi}) \text{ in } \Omega \quad (8)$$

ただし、 $\hat{\psi} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\pi}, \hat{\theta})^T$ とした。線形作用素 \mathcal{S} と \mathcal{L} 、並びに非線形項 $\mathcal{N}(\hat{\psi}, \hat{\psi})$ は次のように定義される。

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (Q + \bar{u}_r) - Pr\Delta + r^{-2}Pr & 2r^{-2}Pr\partial_\theta & \bar{u}_z & \partial_r & 0 \\ -2r^{-2}Pr\partial_\theta & (Q + r^{-1}\bar{u}) - Pr\Delta + r^{-2}Pr & 0 & r^{-1}\partial_\theta & 0 \\ \bar{w}_r & 0 & (Q + \bar{w}_z) - Pr\Delta & \partial_z & Pr^2Gr \\ \partial_r + r^{-1} & r^{-1}\partial_\theta & \partial_z & 0 & 0 \\ \bar{\theta}_r & 0 & (1 + \bar{\theta}_z) & 0 & -\Delta + Q \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}(\hat{\psi}, \hat{\psi}) = - \begin{pmatrix} \hat{u}\hat{u}_r + r^{-1}\hat{v}\hat{u}_\theta + \hat{w}\hat{u}_z - r^{-1}\hat{v}^2 \\ \hat{u}\hat{v}_r + r^{-1}\hat{v}\hat{v}_\theta + \hat{w}\hat{v}_z + r^{-1}\hat{u}\hat{v} \\ \hat{u}\hat{w}_r + r^{-1}\hat{v}\hat{w}_\theta + \hat{w}\hat{w}_z \\ 0 \\ \hat{u}\hat{\theta}_r + r^{-1}\hat{v}\hat{\theta}_\theta + \hat{w}\hat{\theta}_z \end{pmatrix}, \quad \text{and } Q = \bar{u}\partial_r + \bar{w}\partial_z.$$

境界 $\partial\Omega$ 上で課される同次境界条件は、適当な線形作用素 \mathcal{H} を用いて $\mathcal{H}\hat{\psi} = 0$ のように書くことができる。

2.2.1.3 線形安定性

まず、攪乱の振幅が無小 $\|\hat{\psi}\| \ll 1$ の状況を考え、(8)を線形化し、その解をノーマルモードの形に求めよう：

$$\hat{\psi}(r, \theta, z, t) = \phi(r, z)e^{im\theta + \sigma t}, \quad (9)$$

ここで $m \in \mathbb{Z}$ は周方向の波数である。 ϕ は次を満たす：

$$[\sigma S_m + L_m]\phi = 0 \text{ in } \Omega_{2D} \text{ subject to } H_m\phi = 0 \text{ on } \partial\Omega_{2D}. \quad (10)$$

ただし、 $S_m = \mathcal{S}|_{\frac{\partial}{\partial \theta} \rightarrow im}$ 、 $L_m = \mathcal{L}|_{\frac{\partial}{\partial \theta} \rightarrow im}$ 、 $H_m = \mathcal{H}|_{\frac{\partial}{\partial \theta} \rightarrow im}$ を導入した。2次元領域 $\{(r, z) | r \in [0, \Gamma^{-1}], z \in (-1/2, 1/2)\}$ を Ω_{2D} 、またその境界を $\partial\Omega_{2D}$ と書くことにする。(10)は線形固有値問題 $\sigma = \sigma(m, Re, Pr, \Gamma, Gr, Bi)$ を構成する。 σ の実部は攪乱の線形増幅率、また、虚部の符号を変えたものは周波数を意味する。線形安定性理論における目的は、与えられたアスペクト比 Γ 、グラスホフ数 Gr 、ピオ数 Bi 、プラントル数 Pr と波数 m に対して σ が負（主流は攪乱に対して線形安定(条件付漸近安定)）から正（主流は不安定）に符号を変える Re の値 $Re_n(m; Pr, \Gamma, Gr, Bi)$ を求め、 $\min_{m \in \mathbb{Z}} Re_n(m; Pr, \Gamma, Gr, Bi)$ を臨界レイノルズ数 $Re_c = Re_c(Pr, \Gamma, Gr, Bi)$ として決定することである。なお、このときの波数を m_c と書き臨界波数と呼ぶ。主流は $O(2)$ 対称性を持つため、臨界点 (Re_c, m_c) において $\sigma = 0$ か、 $\sigma = \pm i\sigma_i \neq 0$ という純虚数対が固有値として得られる。前者は定常モード、後者は回転波対を意味する。

以下ではハーフゾーンモデル (HZ) とフルゾーンモデル (FZ) に対してこれまでに行われてきた解析結果を紹介する。ただし、紙面の関係上、液柱表面は円柱形状を保ったままであるものとする。なお、特に断らない限り、浮力の効果は完全に無視でき、液柱表面では熱の出入り

がない（完全断熱）と仮定して、グラスホフ数 Gr とピオ数 Bi をいずれも0とおく。

(1) ハーフゾーンモデル (HZ)

1) アスペクト比無限大の液柱問題

液柱長さが無限大 ($\Gamma = \infty$) の場合の線形安定性は Xu と Davis²⁸⁾ によって解析された。ここでは、液柱端面の存在を無視して、温度勾配は z 方向に一様であると仮定するが、任意の z 断面における流量が0であるために z 方向に一定の圧力勾配が課されなければならない³。その結果、攪乱は周方向のみならず z 方向にも周期的であるとしたノーマルモード $\propto e^{i(\pm m\theta + \alpha z) + \sigma t}$ を考えることになり、2次元領域 Ω_{2D} とその境界 $\partial\Omega_{2D}$ 上で定義されていた線形固有値問題(10)は、 r のみに関する1次元固有値問題に帰着される。その際に得られた $r \ll 1$ での有界性の条件

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\pi}, \hat{\theta}) \sim (r^{m-1}, r^{m-1}, r^m, r^m, r^m) \text{ for } m > 0,$$

$$(\hat{u}, \hat{w}, \hat{\pi}, \hat{\theta}) \sim (r, 1, 1, 1) \text{ for } m = 0 \quad (11)$$

は有限アスペクト比をもつ液柱においても成立する。さて、臨界条件は $Re_c = \min_{m \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}} Re_n(m, \alpha, Pr)$ のように求められる。Xu と Davis²⁸⁾ によると、 $Pr < 62.2 (=Pr_*)$ では $m_c = 1$ 、 $\alpha_c \neq 0$ 、 $Pr > Pr_*$ では $m_c = 0$ 、 $\alpha_c \neq 0$ が結論された。なお、いずれの場合も臨界点 $Re = Re_c$ において $\sigma_i \neq 0$ であるため、振動モード（次の段落で述べる ‘hydrothermal waves’）に対して主流が不安定化することが分かる。 $Pr = Pr_*$ というクロスオーバー点では、 $m_c = 1$ という非軸対称攪乱と $m_c = 0$ の軸対称攪乱が同時に臨界を与えるため、これらの攪乱間に非線形相互作用が生じるが、 $m=0$ モードと $m=1$ モード間には共鳴条件が成立しない⁴。なお、Ryzhkov²⁹⁾ の再計算によると、Xu と Davis の解析で見落とされていた新しい $m=1$ のモードが高 Pr 域では臨界を与えるため、臨界波数 $m=0$ になることはなく、 $10^2 \leq Pr \leq 10^3$

³ この場合、主流は z 方向に対しては並進対称性 (SO(2))、 θ 方向には回転対称性と $\theta=0$ に対する鏡映対称性の $O(2)$ 対称性を持つ。

⁴ $\propto e^{i(k_j x - \omega_j t)}$ という形を持つ n 個のモードを考える。 $p_j \in \mathbb{Z}$ に対して $\sum_j^n p_j k_j = 0$ か $\sum_j^n p_j \omega_j = 0$ を共鳴条件という。

にわたって $m_c=1$ が成立することが明らかになった。後者の場合には、 $m_c=1$ の異なるモード間で臨界モードの入れ替えが生じることになるが、クロスオーバー点 $Pr^*=19.95$ での軸方向波数 α と周波数は互いに異なっており、両モードの相互作用も非共鳴的である。これらの非共鳴相互作用についての解析はまだ行われていない。

歴史的には前後するが、円柱形状の問題をさらに単純化して、水平流体層でモデル化した解析が Smith and Davis³⁰⁾によって行われた。すなわち、 xy -平面上に一樣な厚みを持つ流体層が無限に広がっている状況を考え、 x 方向に一樣な温度勾配が作用していると考えた。このとき、古典的な意味でのマランゴニ対流セルが発現するのと同じ機構による定常モード(縦ロール)と、振動モードが発生可能である。後者は‘hydrothermal waves’と名付けられた。これは、低プラントル数の場合には x 方向の主流温度場から、また、高プラントル数の場合には z 方向の温度場から攪乱がエネルギーを得ることによる。振動モードに対するノーマルモードは $\alpha e^{i(k_x x + k_y y) + \sigma t}$ という斜交波対の形に書くことができる⁵⁾。任意の x 断面内での流量が0という条件の下では、斜交波対が臨界条件を与え、 $Pr \rightarrow 0$ のとき $Ma_c \sim Pr^{1/2}$ 、また $Pr \rightarrow \infty$ では $Ma_c \rightarrow 398.5$ が結論された。なお、主流の流量が0でない状況を許すと、速度分布は直線状になるが、その場合には、 $Pr \ll 1$ において臨界モードは $k_x = 0$ の縦振動モードであり、 Pr の増加と共に k_x が増加し、斜交波対が臨界モードになる。 $0.6 \leq Pr \leq 1.6$ では $k_y = 0$ の横振動モードが臨界を与えるが、 $Pr > 1.6$ では $k_x = 0$ の縦ロールが臨界条件を与えること、また、 $Pr \rightarrow 0$ のときは $Ma_c \sim Pr^{1/2}$ 、 $Pr \rightarrow \infty$ で $Ma_c \rightarrow 15.49$ であることが明らかにされた。

2) 有限のアスペクト比を持つ液柱問題

さて、いよいよ有限アスペクト比の液柱マランゴニ対流の線形安定性に話題を移そう。1990年代以降、有限アスペクト比の問題に焦点が移ったが、そこでは2次元領域 Ω_{2D} とその境界 $\partial\Omega_{2D}$ 上で定義された(10)の線形固有値問題を直接取り扱う必要があるため、数値解析が中心的な役割を果たす。なお、これまで様々なアスペクト比 Γ に対する解析が行われてきたが、ここでは広くベンチマーク的に考察されてきた $\Gamma = 1$ の結果についてのみ紹介することにする。

ノーマルモード解析の結果を議論する前に、まず、主流が安定であるための十分条件を求める、‘エネルギー法’と呼ばれる解析法についてごく簡単に触れよう。

$$\int_{\Omega \oplus \partial\Omega} \tilde{\psi}^T \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} S + L \right) \tilde{\psi} - \mathcal{N}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) \right] dx = 0 \quad (12)$$

を考える。ただし $\tilde{\psi} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\pi}, \hat{\lambda}\hat{\theta})^T$ とおいた。 $\hat{\lambda}$ はカッピングパラメータと呼ばれる正の定数である。大雑把

に言うと、 $E = \int_{\Omega \oplus \partial\Omega} \tilde{\psi}^T \cdot S \tilde{\psi} dx$ によって一般化された攪乱エネルギー (>0) を定義して (12) を $\frac{dE}{dt} = F(Pr, \Gamma, Re; \hat{\lambda})$ の形に書く。両辺を E で割った $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$ の上限値 0 が $Re^* = Re^*(Pr, \Gamma; \hat{\lambda})$ において達成されるとき、 $\max_{\hat{\lambda} > 0} Re^*(Pr, \Gamma; \hat{\lambda}) = Re_E$ はエネルギー安定であるための限界を与え、 $Re < Re_E$ では流れは平均として漸近安定である。すなわち、 $Re < Re_E$ は安定のための十分条件である⁶⁾。

Shen et al.³²⁾は攪乱を軸対称に制限した上で、 $0.01 \leq Pr \leq 1.6$, $0.5 \leq \Gamma \leq 2$ に対して、また、Neitzel et al.³³⁾は $0.4 \leq \Gamma \leq 1.8$ の液柱における非軸対称攪乱にエネルギー法を適用した。 $Pr=1$ に対する Re_E の値と、KCl ($Pr=1$)を用いたVelten et al.³⁴⁾の実験による臨界条件との比較から、両者が与える Re_E の一致は良いこと、また、攪乱は非軸対称であることが結論された。

エネルギー法が安定のための十分条件を与えるのに対して、ノーマルモード解析にもとづく安定性理論は不安定のための十分条件を与える。

主流(6)、(7)と線形固有値問題(10)を数値的に解くための離散化として、Table 1のように有限差分法、有限要素法、有限体積法、チェビシエフ多項式に代表される関数展開などが用いられてきた。

Figure 5 (a)–(e)と(f)–(j)はそれぞれ $Pr=0.05$ と1の場合の主流の流線、等温線と線形固有関数である。(g)に示すように、プラントル数が高くなると $(r, z) = (\Gamma^{-1}, -1/2)$ 近傍に等温線が密集し、それに伴って表面張力温度勾配の不均在 $z=-1/2$ 付近に集中するため、その結果流線が密集する。このような解の構造をチェビシエフ多項式のような C^∞ -級関数を用いて展開しようとする、定義域 Ω_{2D} 全体に影響が及ぶという困難が生じる。

Wanshura et al.⁴³⁾は r 方向にチェビシエフ多項式展開、 z 方向に2次の中心差分を用いた解析を行ったが、高プラントル数領域におけるこの困難を避けるために、(5)

Table 1 Discretization methods to solve eqs. (6) and (7) and analyze the eigenvalue problem (10).

Discretization methods	HZ	FZ
finite difference method	Ref. 35, 36, 37	Ref. 45
finite element method	Ref. 38	
finite volume method	Ref. 39	Ref. 46
Chebyshev polynomials both in r and z-directions	Ref. 40, 41	Ref. 47, 48
Chebyshev polynomials in r-dir. Chandrasekhar functions in z-dir.	Ref. 42	
Chebyshev polynomials in r-dir. finite difference method in z-dir.	Ref. 43, 44	

⁵⁾ 水平流体層の場合には、主流は x 方向に並進対称性(SO(2))、 y 方向に並進対称性と $y=0$ に対する鏡映対称性というO(2)対称性を持つ。

⁶⁾ エネルギー法の詳細は、Joseph³¹⁾を参照。

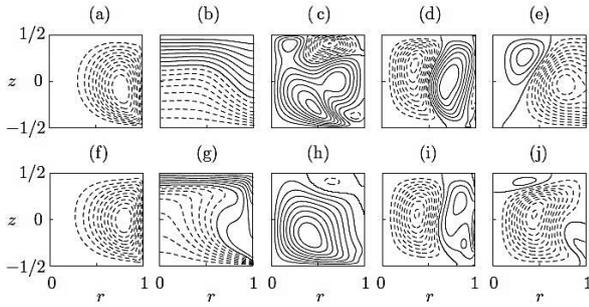


Fig. 5 Spatial structure of the basic flow and disturbance on the critical curves in **Fig.8**. (a), (f): $\Psi(\mathbf{r})$, (b), (g): $\theta(\mathbf{r})$, (c), (h): $\phi_u(\mathbf{r})$, (d), (i): $\phi_w(\mathbf{r})$, (e), (j): $\phi_\theta(\mathbf{r})$. (a)-(e): $Pr=0.05$, (f)-(j): $Pr=1$. ϕ_u , ϕ_w and ϕ_θ respectively indicate the u , w , and θ - components of the eigenfunction.

与えられる液柱表面 $r=\Gamma^{-1}$ における表面張力とせん断応力のバランスの条件 $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} - PrRe\nabla_{\parallel} T = 0$ を

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} - PrRe\nabla_{\parallel} T \cdot f(z) = 0 \quad (13)$$

のように「正則化」した。ここで、 $f(z)$ は **Table 2** で定義される「正則化」因子である。彼らは、 $f_\delta(z)$, $\delta = 10$ を用いることによって $Pr \leq 4.8$ までの解析に成功し、 $Pr \leq 0.05$ では定常モードに対して主流は不安定化するが、 $Pr \geq 0.5$ では振動モードに対して不安定化することを見いだした。また、いずれの場合も $m_c=2$ であると結論した。

Bouizi, *et al.*⁵⁰ に従って、これら 3 種類の正則化による「切断長」 Λ を $0.9 = f(z) = f(1 - \Lambda)$ で定義する。すなわち、

$$1 - \Lambda(n) = f_n^{-1}(0.9), \quad 1 - \Lambda(\alpha) = f_\alpha^{-1}(0.9), \\ 1 - \Lambda(\delta) = f_\delta^{-1}(0.9). \quad (14)$$

Figure 6 に示すように、 $\Lambda(n)$ と $\Lambda(\delta)$ とでは前者が少し優れているもののほとんど差は認められない。 δ と n の増加に伴って $\Lambda(n)$ と $\Lambda(\delta)$ はほぼ同じペースで減少することが分かる。一方、 $\Lambda(\alpha)$ はこれら 2 種類と比較して、小さな負のべきを示している。いずれにせよ、 n , α , δ の増加に伴って切断長は短くなり、等温線並びに流線の集中が顕著な $(r, z)=(\Gamma^{-1}, \pm 1/2)$ 近傍のみが平滑化される。したがって、**Fig. 6** は正則化因子を比較する際に有用な情報を与える。

有限差分、有限体積法、有限要素法などは、離散化に伴う数値誤差中にそういったフィルター効果が取り込まれているため、「正則化」は不要と考えられるが、Nienhüser, *et al.*³⁷ は有限差分法と $\delta=500$ という強い正

Table 2 Regularization functions found in literature, $f(z)$. (a): Ref. 43, 37, 36, 41; (b): Ref. 47; (c): Ref. 49, 50, 51, 52.

$f_\delta(z)$	$\begin{cases} \frac{1}{4} \left[1 - \cos \left(\pi \delta \left(z + \frac{1}{2} \right) \right) \right]^2 & \text{for } z \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{\delta} \\ 1 & \text{for } z < \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \\ \frac{1}{4} \left[1 - \cos \left(\pi \delta \left(\frac{1}{2} - z \right) \right) \right]^2 & \text{for } z \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \end{cases}$	(a)
$f_\alpha(z)$	$1 - e^{-\alpha[1-(2z)^2]^2}$	(b)
$f_n(z)$	$[1 - (2z)^{2n}]^2$	(c)

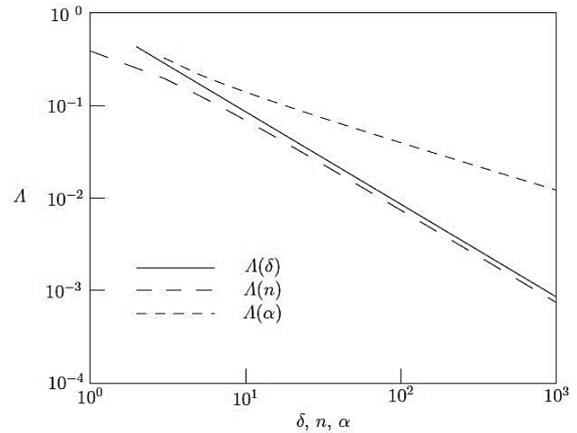


Fig. 6 Cutting-length Λ defined by **Table 2**.

則化因子 $f_\delta(z)$ を併用した解析を行っている⁷。

1999 年に Kuhlmann, *et al.*⁵³ はこの線形安定性問題のとくに数値解析に関する詳細な解説を行っているが、そこでは、 r, z 両方向共にチェビシェフ多項式展開、 r 方向はチェビシェフ多項式展開で z 方向は有限差分、そして、双方向共に有限差分という 3 種類の数値解析法を用いて安定特性を求め、収束性などに関する比較検討を行った。その結果、「正則化」(13) はチェビシェフ多項式展開には必要不可欠であること、また、正則化は結果に大きな影響を及ぼすことを明らかにした。

主流と固有関数の離散化に関数展開を初めて持ち込んだのは Kuhlmann and Rath⁴² である。彼らは r 方向にはチェビシェフ多項式、 z 方向には Chandrasekhar 関数⁸ (主流流れ関数、固有関数の w 成分) とフーリエ級数 (主流温度場および固有関数の u 成分と θ 成分) で展開した。しかし残念なことに、数値解析結果は文献³⁵ やその後の他の研究者による結果とは異なっている。例えば、臨界条件を与える攪乱が定常から振動に入れ替わるクロ

⁷ この点については、文献 53, 54 に詳しい議論がある。

⁸ Chandrasekhar 関数は、Orr-Sommerfeld 方程式の固有値問題においてチェビシェフ多項式の有用性が Orszag⁵⁵ によって示された 1971 年以前から、流れの安定性に関連した線形固有値問題に頻繁に用いられてきた。詳細は Chandrasekhar⁵⁶ を参照されたい。 $S_m(z) = \frac{\sinh \mu_m z}{\sinh \frac{\mu_m}{2}}$, $C_m(z) = \frac{\cosh \lambda_m z}{\cosh \frac{\lambda_m}{2}} - \frac{\cos \lambda_m z}{\cos \frac{\lambda_m}{2}}$ で定義される。ただし、 μ_m と λ_m は、 $\coth \frac{\mu}{2} - \cot \frac{\mu}{2} = 0$, $\tanh \frac{\lambda}{2} + \tan \frac{\lambda}{2} = 0$ の第 m 番目の 0 点である。

Table 3 Linear critical condition of HZ with $Pr=1$, $\Gamma=1$ and $Gr=Bi=0$. (a): (13) is applied both for the basic flow and disturbance, (b): (13) is applied only for the basic flow.

Refs.	35	42	43	36	38	41(a)	41(b)
Re_c	2484	1450	2539	2532	2551	2678	2562
m_c	2	1	2	2	2	2	2

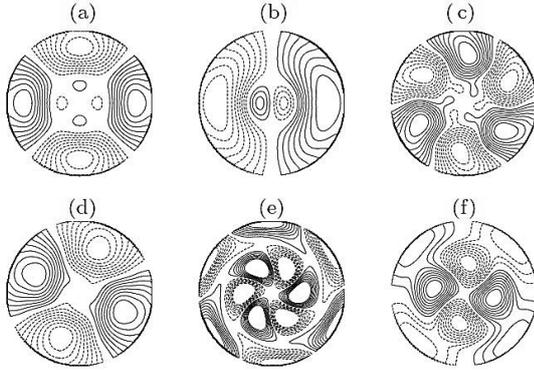


Fig. 7 θ - component of the linear eigenmode $Re[\phi_\theta e^{im_c\theta}]$ on the horizontal mid-plane at $z=0$ along the critical curve in Fig. 8. (a): (Pr, m_c, Re_c)=(0.05, 2, 19937), (b): (0.057, 1, 11000), (c): (0.07, 3, 5483), (d): (0.1, 2, 15979), (e): (0.4, 3, 9560), and (f): (1, 2, 2679). $\Gamma=h/r^*=1$. (a) and (b): steady mode, (c)-(f): oscillatory mode. In (c)-(f), rotating waves rotate in anti-clockwise direction.

スオーパー点 $Pr=Pr_*$ は $\Gamma=1$ の場合 $Pr_* \approx 0.058$ であるのに対し、彼らの結果は $Pr_* \approx 1$ である。また、 $Pr=1$ 付近では $m_c=2$ が知られているのに対して彼らは $m_c=1$ を結論している。

Neitzel *et al.*^{57,35} は流れ関数と渦度を用いて記述された主流を、有限差分近似のもとに半陰的予測子修正子多重反復法を用いて解いた。線形固有値問題(10)にも有限差分を用いたが、格子点は r, z 方向共に主流の場合の半数としている。彼らの結果は Neitzel *et al.*³³ のエネルギー法による結果や Velten *et al.* による実験結果³⁴ と直接比較されたが、(10) にもとづく線形安定性解析がそれ以外の結果とは著しく高い Re_c を与えることが明らかにされた。主流が安定であるための十分条件と不安定であるための十分条件が与える Re_c の間に大きなギャップがあることについて、Neitzel *et al.*³⁵ は、液柱表面の変形の効果と、液柱と周囲環境との間の熱放射に加えて、‘亜臨界不安定性’を原因の一つとして考えているが、この最後の点に対する解答は弱非線形安定性に関する次節で与えられる⁹。

なお、得られた臨界波数 $m_c=2$ は実験結果と一致している。

式(10)で与えられる固有値問題の解析は、その後相次いで行われた。Chen, *et al.*³⁶ は非一様格子を用いた有限差分によって主流と線形固有関数を離散化した。線形固有値問題に関しては、流れは中立安定であると仮定した上で Newton-Raphson 反復法を適用し、いくつかの m に対して $Re_n(m)$ を求め、 $Re_c = \min_m Re_n(m)$ を決定した。 $10^{-10} \leq Pr \leq 8$ の範囲での解析の結果、 $Pr \leq 0.057$ では定常モード、それ以上では振動モードが臨界条件を与えること、また、 $0.1 \leq Pr \leq 0.8$ では $m_c=3$ であり、 $Pr \leq 0.057$ と $Pr \geq 0.9$ では $m_c=2$ であることが結論された。

Levenstam, *et al.*³⁸ は Wanschura, *et al.*⁴³ や Chen, *et al.*³⁶ による線形解析で詳細な情報が欠けていた中間プラントル数を主な対象とした解析を行い、また、数値シミュレーションを行って、両者の結果を比較した。ここでは主流と固有関数双方とも、 Ω_{2D} 離散化に有限要素法を用いている。その結果、 $0 \leq Pr < 0.057$ では $m_c=2$ の定常モード、 $0.057 \leq Pr < 0.07$ では $m_c=3$ の振動モード、 $0.07 \leq Pr < 0.183$ では $m_c=2$ の振動モード、 $0.183 \leq Pr < 0.84$ では $m_c=3$ の振動モード、 $Pr \geq 0.84$ では $m_c=2$ の振動モードが臨界モードであることを見いだした。

液柱が円柱形状と異なる場合の、体積比 (= 液柱の体積/円柱形状の体積) が臨界条件に及ぼす影響については、 r, z 双方向共にチェビシェフ多項式を用いた Chen *et al.*⁵⁸、境界適合座標を導入し、 $\delta=500$ の正則化因子 $f_\delta(z)$ を有限差分法に適用した Nienhüser and Kuhlmann³⁷、有限体積法を用いた Ermakov and Ermakova³⁹ 等によって解析されてきたが、この問題については原論文を参照頂きたい。なお、正則化因子のパラメータとして Chen, *et al.*⁵⁸ は Wanschura *et al.*⁴³ と同様に $\delta=10$ を用いたが、その程度の δ では $Pr=10$ や 50 の場合にはマランゴニ対流の駆動機構を損ねると Kuhlmann *et al.*^{53,37} は指摘している。なお、Ermakov and Ermakova³⁹ の有限体積法を用いた解析では、正則化(13)の類いは使われていないが、 $Pr \approx 70$ という高プラントル数まで臨界条件が求められている。

その後、HZ の線形安定性に関しては、MEIS による宇宙実験や地上実験結果を再現すべく高アスペクト比や低アスペクト比をもつ液柱に対する解析が行われてきたが、理論値は実験値と比較してかなり高い臨界値を与えるため、両者の差を埋めることが当面の課題である。Figures 8, 9, 10 には r と z 両方向共にチェビシェフ多項式展開を行い、 $\delta=10$ の正則化因子 $f_\delta(z)$ を用いた結果を示す⁴¹。得られた臨界条件を $Pr \leq 1$ に対してプロットしたものが Fig 8 である。Figure 5 に示したように、 $r = \Gamma^{-1}$, $z = -1/2$ 近傍において主流の温度場は急峻に変化し、それに伴って流線が集中するが、そのような急激な変化は線

⁹ 線形安定である $\sigma_r < 0$ の領域で、非線形相互作用によって不安定化することをいう。次節の超臨界分岐と亜臨界分岐に関する脚注も参照のこと。

形固有関数には見受けられない。そこで、主流についてのみ(13)を課した結果が破線である。Figure 8 から $0.0561 \leq Pr \leq 0.0576$ という極めて狭い範囲で $m_c=1$ の定常モードが臨界条件を与えることが分かる。Lyubimova and Skuridyn⁵⁹⁾ も、この低プラントル数領域において $m_c=2$ から 1, 3 を経て $m_c=2$ に至る変化を、液柱下面を垂直加振する問題における加振振幅が 0 の結果として示し

ている。彼らの結果は有限差分法による。なお、臨界曲線の全体像を Fig. 9 に示すが、Levenstam *et al.*³⁸⁾ とでは、 $0.6 \leq Pr \leq 0.8$ において最大で 28% 程度の差があるものの、それ以外では差は数パーセントから 10% 以内に収まっている。

浮力の効果が安定性に及ぼす影響については Wanschura *et al.*⁴⁴⁾ によって検討されている。まず、

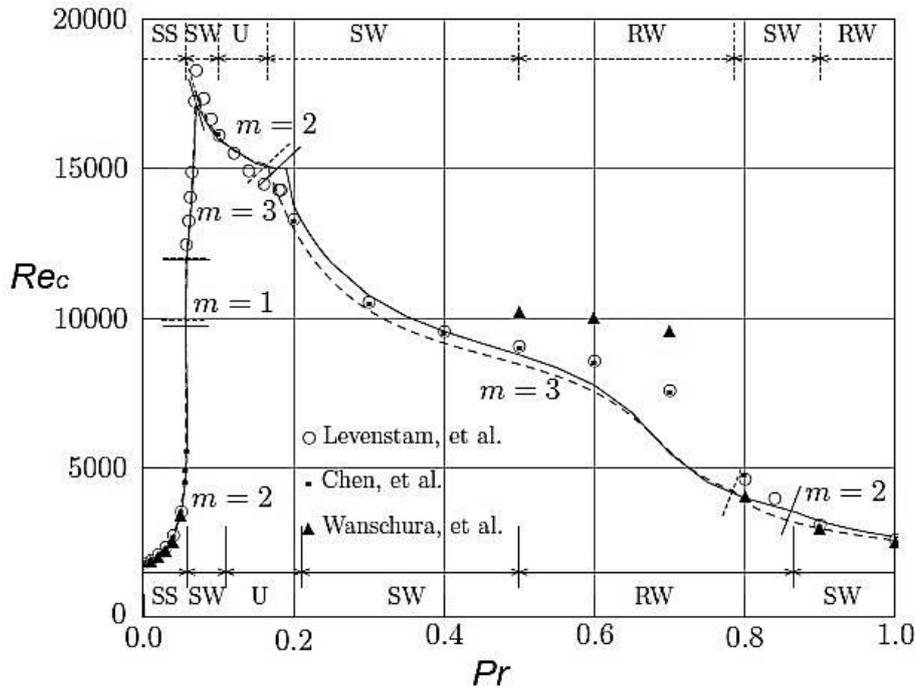


Fig. 8 Linear critical condition for HZ and weakly nonlinear characteristics of the critical modes.⁴¹⁾ Solid line: regularization (13) is adopted both on the basic flow and the disturbance, dashed line: (13) is adopted only on the basic flow. Results of Wanschura *et al.*⁴³⁾, Chen *et al.*³⁶⁾ and Levenstam *et al.*³⁸⁾ are shown for comparison. The weakly nonlinear characteristics along the concrete curve are summarized at the bottom of the figure whereas those along the dashed curve are at the top of the figure. ‘SS’ denotes stable steady state, ‘RW’ denotes stable rotating waves, ‘SW’ denotes stable standing waves, and ‘U’ indicates all the bifurcating solution branches being unstable.

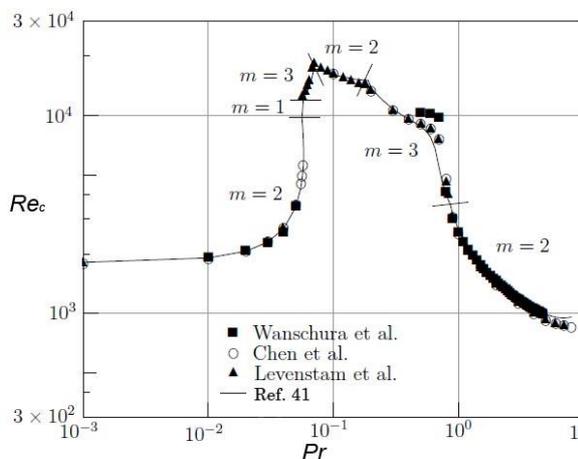


Fig. 9 Critical Reynolds number given by the linear eigenvalue problem (10) for HZ.

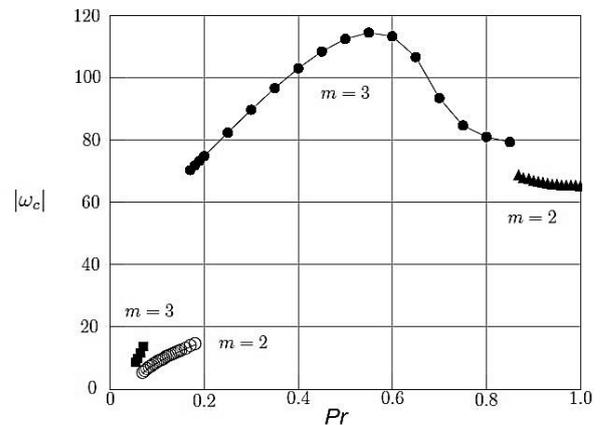


Fig. 10 Critical frequency of oscillatory modes given by (10) for HZ. O(2)-symmetry makes the eigenvalue being a complex conjugate pair so that the frequency has the form of $\pm \omega_c$.

$Re=0$ の状況を想定すると, $Gr > Gr_c (>0)$ でレイリー・ベナール対流 (軸対称ロール解) がピッチフォーク分岐によって生じる. ピッチフォーク分岐のノーマルフォーム $\dot{x} = \sigma x - x^3$ は構造不安定であり, 微小定数項 ϵ を摂動項 (不完全性) として付加した $\dot{x} = \epsilon + \sigma x - x^3$ は, $\epsilon > 0$ の場合には Fig. 11 の実線と破線のような分岐特性を示す. さて, レイノルズ数 Re が非 0 の正の値を持つ場合には, 液柱表面では下降流がマランゴニ効果によって駆動される. このため, 軸対称ロール解の分岐は不完全であり, Fig. 11 と同様の分岐図が得られ, また $Re < 0$ の場合にはこの図が上下反転した形が得られる. さて, 臨界レイノルズ数に対する浮力の影響については, $Pr=0.02$ の場合, 不安定成層は不安定化効果を, また, 安定成層は安定化効果を及ぼし, $m_c=2$ である. これに対して, $Pr=4$ の場合には, 臨界レイノルズ数 Re_c の最小値が $Gr=-90 \pm 5$ に存在するため, $Gr=0$ において Re_c は正の勾配を有する. すなわち, 不安定成層は安定化効果を及ぼす. ただし, 十分に大きな $|Gr|$ に対しては浮力は安定化に働くこと, また, $m_c=2$ であることが報告されている.

液柱表面 $r = \Gamma^{-1}$ での周囲流体への熱損失の影響については, 例えば Chen *et al.* ³⁶⁾ によると, $Pr=1$ の場合, ビオ数 Bi の増加に伴って臨界レイノルズ数 Re_c は増加する, すなわち, 安定化効果を及ぼすことが結論される.

(2) フルゾーンモデル

FZ の安定性については, 今世紀に研究が集中しており, まだシステマティックな解析が行われたとは言いがたい. フローティングゾーン法におけるリングヒータ加熱による熱的な境界条件の設定には, 様々なバリエーションがあり得るが, 簡単のために第 2 種境界条件, すなわち, 熱流束を液柱表面 $r = \Gamma^{-1}$ 上で与えるのが一般的である. HZ とは対照的に, FZ の場合には離散化のために関数展開がもっぱら使われているが, その際に, 正則化因子の重要性が再度浮き彫りにされた. Kasperski *et al.* ⁵¹⁾ や Chénier *et al.* ⁵⁴⁾ は液柱側面からの加熱として $q(z) = (1 - (2z)^2)^2$ という形の熱流束分布を仮定した. また, 正

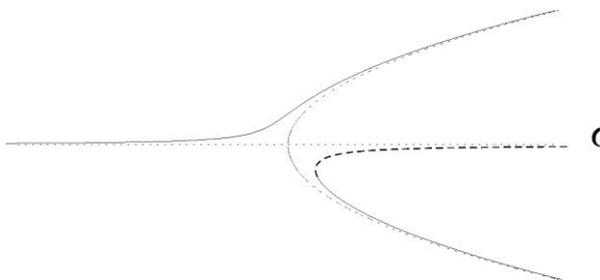


Fig. 11 Imperfect bifurcation described by $\dot{x} = \epsilon + \sigma x - x^3$ for $\epsilon > 0$. Dotted line : $\epsilon = 0$, solid line: stable, dashed line: unstable.

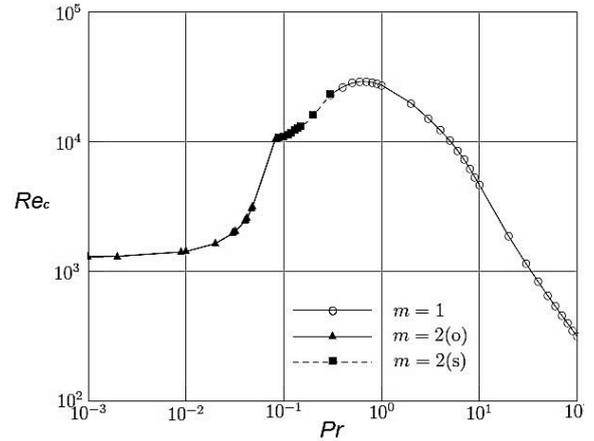


Fig. 12 Linear critical conditions for FZ reproduced from Bouizi *et al.* ⁵⁰⁾. Solid line and (o): oscillatory mode, dashed line and (s): steady mode.

則化(13)の因子として C^∞ -級である $f_n(z) = [1 - (2z)^{2n}]^2$ を用いて, チェビシェフ多項式展開を適用した. その際に, 文献 ⁵¹⁾ では $n=1$, また文献 ⁵⁴⁾ では $1 \leq n \leq 10$ の範囲では定性的な結果に大きな影響がないことを確認した上で, $n=1$ をほとんどの解析において採用し, 分岐ダイアグラムの作成に際しては $n=10$ を用いている ¹⁰⁾. $\Gamma=2$, $Pr=0.01$ にパラメータを固定した上で, 浮力の効果と表面張力の効果を考慮に入れた解析を軸対称性の仮定の下に行った ¹¹⁾. レイリー数 Ra を分岐パラメータとして $Ma \in [0, 600]$ に対して主流を求めたが, その解分枝は鞍点・結節点分岐点を 2 つ含んでいる ¹²⁾. その結果, 2 種類のホップ分岐が鞍点・結節点分岐点以外から生じることが結論された ¹³⁾.

熱流束 $q(z)$ の代わりに液柱表面温度を第 1 種境界条件として採用することによって, Davis and Smith⁶⁰⁾ は数値シミュレーションを行った. 非軸対称攪乱の消長を有限要素法によって調べた結果, $\Gamma=2$, $Pr=0.02$ では, 最初に臨界を与えるのは $m_c=2$ であること, また, $Re > Re_c$ での長時間にわたるシミュレーションによって $m=1$ モードが台頭することを明らかにした. このようなモード間相互作用についての解析は次節で解説する弱非線形解析の典型的な課題であるが, それはまだ行われていない.

Huang *et al.* ⁴⁷⁾ は FZ に鉛直方向に一樣磁場を作用させた状況下での線形安定性を解析した. そこでは熱流束が $q(z) \propto 1 - (2z)^2$ と仮定され, また, 正則化因子としては Table 2 (b) の関数が採用されている. ここで, α はチューニングするためのパラメータである. 熔融金属に代表される低プラントル数流体 $Pr=0.001$ と 0.02 を対象に, ハルトマン数が $O(100)$ まで増加すると, 磁場が強い安定化効果を及ぼし, 臨界レイノルズ数は 10^2 のオーダー増

¹⁰⁾ Chénier *et al.* ⁵⁴⁾ によると, n を 1 から 10 まで 変化させると, 臨界レイリー数は最大で 25% 程度の影響を受ける.

¹¹⁾ FZ は本来 $O(2) \oplus Z_2$ を有しているが, 浮力の効果を取り込むと Z_2 対称性は破れる.

¹²⁾ $0 = \sigma - x^2$ に代表される分岐構造を鞍点・結節点分岐と呼ぶ.

¹³⁾ 定常解からの周期解の分岐はホップ分岐と呼ばれる.

加することが明らかになった。Walker *et al.*⁴⁸⁾ は空間的に一様な横磁場が一定の角速度で回転する場合を考え、磁場が安定性に及ぼす効果について調べている。Pr=0.001, 0.02, 0.04 の流体について線形解析が行われた結果、磁気テイラー数の増加に従って、 Re_c は最初減少するものの、その後増加すること、また、臨界波数は2から1に変化することが示された。

液柱の上下端面をその軸のまわりに異なる速度で回転させることの影響については Kahouadji *et al.*⁴⁹⁾ による解析がある。Pr=0.02 の場合、上下面の回転角速度がどのような比であろうとも、弱い回転が大きな不安定化効果を及ぼすことが明らかにされた。

2.2.1.4 弱非線形安定性 – 定常解への分岐とホップ分岐

線形段階では、攪乱振幅が無限小という状況を仮定したが、ここでは、攪乱振幅は小さいものの、攪乱間の相互作用は無視できない程度に有限であると仮定する弱非線形段階に焦点を当てる。定常、もしくは周期攪乱に対して主流が安定性を喪失する臨界点において、攪乱の解分枝が主流解から分岐する。円柱形状のまま無変形の液柱を対象にしているため、定常軸対称主流は周方向の任意の回転と、中心軸を含む任意の鉛直面に関する鏡映に対して不変である。そのような O(2) 対称性のもとで非線形攪乱の振幅の時間発展を記述する方程式（振幅方程式）を導出することによって、分岐解の安定性（弱非線形安定性）を議論しよう。現在までのところ、弱非線形解析は HZ に対してのみ行われており、FZ に対する解析は今後に残された課題である。

(1) 定常解への分岐

まず、 $Re \downarrow Re_c$ のとき、線形固有値 σ が複素 σ 平面の実軸上を左に移動して原点で虚軸と交差する場合を考える。このとき、攪乱を

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \zeta(t)\phi(\mathbf{r})e^{im\theta} + c.c. + h.o.t. \quad (15)$$

の形に仮定しよう。ここに c.c. は直前の項の複素共役を、また、h.o.t. は高次の非線形項を意味する。O(2) 対称性の下では攪乱振幅 $\zeta(t) (\in \mathbb{C})$ に対する方程式は、実不変多項式 $p = p(|\zeta|^2)$ を用いて一般性を欠くことなく $\frac{d}{dt}\zeta = \zeta \cdot p(|\zeta|^2)$ のように表すことができる。¹⁴ p を原点周りで展開して2次で打ち切ると、いわゆる Stuart-Landau 方程式

$$\frac{d}{dt}\zeta = \zeta(\sigma + \lambda|\zeta|^2), \quad \sigma, \lambda \in \mathbb{R} \quad (16)$$

を得る。非線形項の係数 λ を非線形攪乱方程式(8)と境界条件から導出するための弱非線形摂動展開については、紙面の都合上省略する。¹⁵ (16) 式の非自明定常解 $|\zeta|^2 = -\sigma/\lambda$ は $\sigma\lambda < 0$ のときに存在する。Figure 13 に示すように、 $\lambda < 0$ のときは $\sigma < 0$ で自明解（主流）が安定、 $\sigma > 0$ で非自明解が安定である。また、 $\lambda > 0$ のときは $\sigma < 0$ で自明解が安定、非自明解は不安定であり、 $\sigma > 0$ で自明解が不安定である。¹⁶

液柱マランゴニ対流では $Pr < 0.057$ という低プラントル数において定常解が分岐するが、 $Pr = 0.02$ では分岐が超臨界であることが Leypoldt *et al.*⁶²⁾ によって報告された。そこでは、(16)に含まれる λ の値が $Pr = 0.02$ に対する数値シミュレーション結果のフィッティングから決定されたが、¹⁷ 数値シミュレーションにもとづく λ の値を例えば Pr のようなパラメータを連続的に変化させて評価することは容易ではない。また、シミュレーションに用いる初期条件を工夫して、調べたいモードの平衡状態を求める必要がある。古典的な意味での弱非線形解析は、最近になって Fujimura⁴¹⁾ によって行われた。そこでは、 $|\zeta| \ll 1$ を微小量と見なして、振幅方程式が(16)の形をとることを最初に仮定した上で、そこに含まれる係数を決定する、振幅展開と呼ばれる摂動展開法が用いられた。その結果、 $0.01 \leq Pr \leq 0.0578$ での $m = 2$ モードに対しては $\lambda < 0$ が得られ、定常解の分岐は超臨界であることが結論された。

(2) ホップ分岐

つぎに周期解に対して主流が不安定になる場合、すなわち、 $Re \downarrow Re_c$ のとき、複素共役対の固有値が複素 σ 平面の虚軸を右から横切る状況を考えよう。攪乱 $\hat{\psi}$ を

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \zeta_1(t)\phi_1(\mathbf{r})e^{i(-m\theta + \omega t)} + c.c. + \zeta_2(t)\phi_2(\mathbf{r})e^{i(m\theta + \omega t)} + c.c. + h.o.t. \quad (17)$$

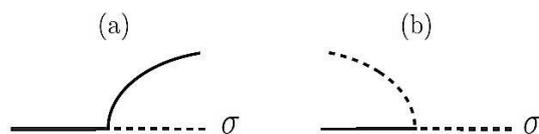


Fig. 13 Bifurcation diagram of steady solution to (16). (a): supercritical bifurcation ($\lambda < 0$), (b): subcritical bifurcation ($\lambda > 0$). Solid line: stable, dashed line: unstable. Note that the linear growth rates σ is related with the supercriticality parameter by $\sigma \propto \frac{Re - Re_c}{Re_c}$.

¹⁴ 以下では、煩雑になることを避けるため、不変多項式のパラメータ依存性は明記しない。

¹⁵ 弱非線形摂動展開については例えば⁶¹⁾、液柱マランゴニ対流への応用については⁴¹⁾を参照されたい。

¹⁶ $\sigma > 0$ の領域への非自明解の分岐を超臨界、 $\sigma < 0$ の領域への分岐を亜臨界という。

¹⁷ σ の Re 依存性は線形解析から求めることができる。一方、非線形項の係数 λ は、定常攪乱の平衡振幅をいくつかの Re に対して数値シミュレーションによって求め、そこから決定することができる。

の形に仮定する. $O(2)$ 対称性のもとでは, 振幅 ζ_1, ζ_2 の時間発展は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = (\hat{p} + i\hat{q}) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} + (\hat{r} + i\hat{s})(|\zeta_2|^2 - |\zeta_1|^2) \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ -\zeta_2 \end{pmatrix}$$

によって記述されることが, 同変分岐理論により結論される⁶³⁾. ここで, $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}, \hat{s}$ は $|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2, (|\zeta_2|^2 - |\zeta_1|^2)^2$ の実多項式である. これらの多項式を原点周りで展開して 2 次で打ち切ると,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_1(\sigma + \lambda_1|\zeta_1|^2 + \lambda_2|\zeta_2|^2), \\ \dot{\zeta}_2 &= \zeta_2(\sigma + \lambda_2|\zeta_1|^2 + \lambda_1|\zeta_2|^2) \end{aligned} \quad (18)$$

を得る. ただし, $\sigma, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ である.

さて, ホップ分岐による分岐解の安定性は λ_1 と λ_2 の実部 λ_1^r, λ_2^r の符号と σ の実部 σ_r の符号によって **Fig. 14** のように分類される. その結果, 回転波 (RW, $|\zeta_1| \neq 0, \zeta_2 = 0$ もしくは $\zeta_1 = 0, |\zeta_2| \neq 0$) と定在波 (SW, $|\zeta_1| = |\zeta_2| \neq 0$) のいずれか一方が安定である場合には, 他方は不安定であること, また, 重臨界分岐解はつねに不安定であることが分かる.

回転波と定在波の選択性については, 無限に広がった水平流体層に一定の温度勾配を課したマランゴニ対流に対する弱非線形解析が Smith⁶⁴⁾ によって実行された. そこでは, (18) が導出されたのみならず, 空間変調の効果を取り込んだ側帯波不安定についての解析も行われた. 液柱マランゴニ対流の場合には, m は整数値しかとれないため, 側帯波の波数 m と m_c の差は有限であり, 本来の側帯波不安定は存在しない. さて, 定常モードへの分岐の場合と同様に, 数値シミュレーション結果から λ_1, λ_2 の値を $Pr \geq 1.5$ に対して推定した結果, Leypoldt *et al.*⁶⁵⁾ は $Pr < 7.8 \pm 0.1$ では回転波が安定, それ以上では定在波が安定であることを報告した. これに対し, Fujimura⁴¹⁾ による振幅展開を用いた弱非線形解析の結果は, $1 \leq Pr < 6.6$ で回転波が, それ以上では定在波が安定であることを示している. **Figure 8** には, $Pr \leq 1$ における線形臨界曲線と, 弱非線形結果が予測する安定なモードが要約されている. 図に示した弱非線形特性と, Levenstam *et al.*³⁸⁾ の数値シミュレーション結果は食い違っていて, 彼らは, $0.07 \leq Pr < 0.84$ では定在波が, $Pr \geq 0.84$ では回転波が選択されると結論している. なお, $0.18 \leq Pr < 0.8$ の範囲では $m_c = 3$ であるが, 第 2 番目の中立モードは $m = 4$ によって与えられる. Levenstam *et al.* は, $m = 4$ が与える中立レイノルズ数 Re_n を超えたレイノルズ数でシミュレーションを行うと, つねに $m = 4$ の定在波が安定に得られると報告している. 臨界モードではない $m = 4$ のモードが卓越する機構は, $m = 3$ モードとの非線形相互作用を解析することによって初めて明らかになる.

Yazawa⁶⁶⁾ は低アスペクト比液柱を用いた HZ の地上実験を行い, 主流から回転波が超臨界分岐することを明ら

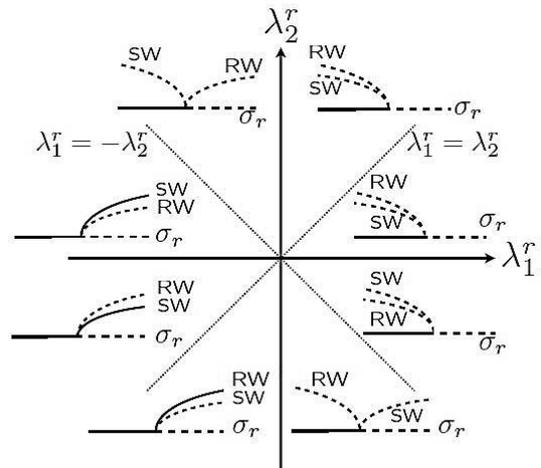


Fig. 14 Stability diagram for Hopf bifurcation described by (18) in the presence of $O(2)$ - symmetry. SW: standing waves, RW: rotating waves.

かにすると共に, ある条件下で分数調波が観察されることを報告している. しかし, 実験に用いられた高プラントル数流体に対する弱非線形解析は原理的には可能であるものの数値解析的に困難を極めるため, 実験結果を理論的に説明するためには, 今後の数値解析手法の大きな進展を待たなければならない.

Shevtsova *et al.*⁶⁷⁾ は浮力の効果が表面張力効果と共存する HZ を数値シミュレーションによって取り扱った. その結果, $m = 0$ の hydrothermal wave と $m = 1$ の hydrothermal wave 対との間での相互作用が観察された. 流れ場は時間に対して周期性を持つが, 1 周期の一部ではある周方向に, 残りの時間は逆方向に回転する構造が得られている.

また, 前節で紹介したように, FZ では, $m = 2$ モードと $m = 1$ モード間の 2:1 共鳴と思われるダイナミクスが数値シミュレーションによって得られた.⁶⁰⁾

弱非線形解析は, 臨界モードのパターン選択機構を記述するのみならず, 上で簡単に紹介した実験や数値シミュレーションにおいて観察された複数モード間相互作用を, 理論的に説明するために極めて有用である.¹⁸⁾ しかし, 弱非線形解析の展開基盤はあくまで線形臨界状態であり, 肝心の高精度な線形解析がまだ開発途上にあるため, 弱非線形解析はその先の課題として取り残されている感が強い.

2.2.1.5 まとめ

ハーフゾーンモデル (HZ) とフルゾーンモデル (FZ) の安定性を, 線形および弱非線形解析と, それらに不可欠な数値解析に焦点を当てて概観した. HZ は比較的实验が容易であるが, FZ は加熱自体が非常にデリケートであ

¹⁸⁾ たとえ弱非線形理論の適用範囲を大きく外れていたとしても, 振幅方程式によって定性的に説明できる現象も多く存在する.

り、実験で達成された境界条件を特定することは難しい。安定性の解析の上でも、HZ はモデルを決めれば境界条件が一意に定まるが、FZ は液柱側面の熱的境界条件に自由度があるため、HZ よりも任意性が多い。HZ の解析では、近年は関数展開が使われなくなっているが、FZ に関しては、 r, z 両方向にチェビシェフ多項式展開を用い、切断長 A の極めて小さな正則化因子を併用した解析が主流になっている。有限差分法や有限要素法などの場合は、意図しないままに正則化が自動的に取り込まれているため、どのような正則化を課すのかを明示的に制御できる関数展開の方が好ましいとも考えられる。弱非線形解析の観点からは、関数展開に正則化を併用した解法が扱いやすいが、正則化を数学的に正当化することはできないため、例えば接合漸近展開を数値解析と併用するなどのブレイクスルーの出現が望まれる。

FZ はフローティングゾーン法を直接モデル化したものであるため、液柱の安定化（制御）に関してもいくつかの試みが安定性解析の枠組みで行われつつある。ただ、FZ に関する弱非線形解析はまったく手つかずの状態である。

2.2.2 低 Pr 液柱の数値解析

2.2.2.1. はじめに

低 Pr 流体の HZ 液柱内でのマランゴニ対流の数値解析は Chang and Wilcox^{68,69)} による 2 次元軸対称定常流の解析 ($Pr = 0.023, 0.3, 2$) に始まる。彼らは、上下の伝熱面間の温度差が大きい場合の解が極めて複雑な流れとなることから、実際には振動流が発生するであろうと推測した。この数値解析および、自然対流が消滅するはずの、微小重力下の半導体結晶の FZ 法による結晶育成時にもミクロ成長縞が発生するという実験結果は大きなインパクトを与え、表面張力対流の不安定化現象に関する研究の増加のきっかけとなった。Rupp *et al.*⁷⁰⁾ は液柱内の流れを 3 次元非定常解析 ($Pr = 0.007 \sim 500$) し、 $Pr \ll 1$ の低 Pr 流体のマランゴニ対流は温度差の増大とともに、軸対称定常流から 3 次元定常流（非振動流）へ、さらに大きな温度差で振動流へと 2 段階で振動流へと遷移すること、Pr が大きい場合には軸対称非振動流から振動流へと 1 段階遷移が生じること、を示した。1990 年代後半から液柱内の軸対称定常マランゴニ対流の安定限界と不安定化後の 3 次元流のパターンや振動周波数等に関する研究が急速に展開された。そのうちの線形安定解析については既に前節で説明した。線形解析は、流れの遷移の臨界条件におけるパターンや振動数に情報は得られるが、臨界温度差以上での挙動を調べるには非線形数値解析に頼らざるを得ない。Levenstam *et al.*⁷¹⁾ は $Pr = 0.01$ 、アスペクト比 1.0 の液柱のマランゴニ対流の 2 つの遷移についての数値解析を行い、第 1、第 2 いずれの遷移においても波数 2 のパターンが発生し、第 2 遷移後の振動は $m = 2$ のパターンの中心の低温流が中心軸 (Z 軸) を横切る直線往復運動をする形の振動流（後述の (2+1) タイプの振動）であ

ることを示した。その後いくつかの数値解析結果^{38,62,72-74)} が報告されているが、いずれももっとも簡単な液柱モデル（上下の円板状の伝熱板に挟まれた真円柱状の液柱、伝熱板の温度はそれぞれ一定）を用いており、 Re_{c1} に関する線形安定論の結果の確認と、 Re_{c2} の値、振動モード、振動周波数等の詳細を知ることによって重点が置かれた。

一方、低 Pr 流体は高温で反応性の高い熔融金属か熔融半導体であるため、不透明なための可視化の困難さ、計測が困難で、消費電力が大きく、遠隔操作が困難で、難酸化膜の発生による界面の汚染に対処するために頻繁かつ長時間のクルータイムを必要とするなど、ISS 上で低 Pr 液柱の実験をすることは不可能と判断された。そのため、低 Pr 流体の液柱内の軸対称マランゴニ対流の不安定化によって発生する 3 次元派生流の研究は地上実験で実施されることとなった。このプロジェクトにおいては、比較的低融点である熔融錫を用いることとなったが、熔融錫は不透明で内部の流れの状態を観察することが不可能であるため、その代替手段としての数値解析が必要不可欠と判断された。また、地上実験でこれまで誰も検出した経験の無い、低 Pr 液柱内の軸対称定常流から 3 次元非振動流および振動流への遷移の臨界レイノルズ数 Re_{c1} 、 Re_{c2} を決める実験装置の設計、特に温度検出システムの設計・改良のために必要な、熱電対起電力のレベル、流れの変化によって発生する温度変化の大きさ、振動振幅や周波数などの基礎データを提供するという役割も担った。多数の位置での温度の経時変化を計算することで、温度計測システムのゲイン、熱電対信号に対するハイパス・ローパスフィルターの設計・改良等に有効利用された。さらに、測定された温度信号と比較することで、液柱内の流れがどのような状態にあったのかを推定する比較基準としても利用できる。本節では、熔融錫液柱を中心に、低 Pr 液柱内マランゴニ対流の不安定化にかかわる数値解析結果の概要を解説する。

2.2.2.2. モデルと数値解析結果

シミュレーションは、モデル 1 (2.2.2.1 で説明した、真円筒形状の HZ の上下をそれぞれ一定温度の伝熱円板で挟んだモデル) を用い、熔融錫 ($Pr=0.009$) 液柱の広範なアスペクト比にわたって Re_{c1} 、 Re_{c2} 、周方向波数、振動数、振動モード等を明らかにし、Stability map を描くことを目的とする数値解析と、実験装置により近付けた、モデル 2 (液柱上下に鉄製のロッドを設け、ロッドの上下端の温度を規定する) を用いて、実測の温度情報と液柱内の流動現象との関連を明らかにし、正確な臨界条件決定に資することを目的とする数値解析、とに区分される。これら数理モデルは、基本的には 2.2.2.1 で示したと同様であるが、無次元化にあたって液柱半径を使用する。

モデル 1 : Figure 15 の形状の液柱に対して、最初一定温度 T_m で静止状態にある液柱の上端、下端の伝熱面温度を $\tau=0$ において T_h, T_c に瞬間的に変え、以後その温度に保つ

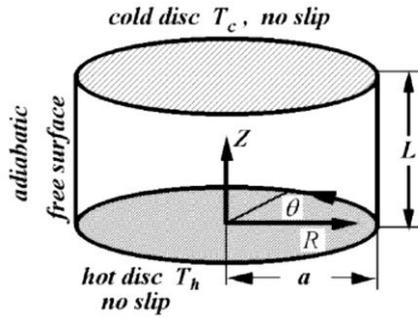


Fig. 15 Model 1 of a HZ liquid bridge of molten tin.

て液柱内のマランゴニ対流を計算する. 無次元表示した基礎式, 初期条件, 境界条件は以下に示す. ここで用いる無次元変数, 無次元パラメータの定義は, $\{R, Z\} = \{r/a, z/a\}$, $P = \rho a^2 / \mu \nu$, $U = \mathbf{u}a / \nu$, $\Theta = (T - T_m) / \Delta T$, $\Delta T = (T_h - T_c)$, $T_m = (T_h + T_c) / 2$, $\tau = t \nu a^2$, $Pr = \rho a / \mu$, $Re = \sigma_T \Delta T a / \mu \nu$ である.

基礎式は
 $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$,

$$\partial \mathbf{U} / \partial \tau + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U},$$

$$Pr(\partial \Theta / \partial \tau + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta) = \nabla^2 \Theta,$$

初期条件, 境界条件は下記の通りである.

$$\tau = 0 \text{ で: } \mathbf{U} = 0, \Theta = 0.$$

$$Z = 0, Z = As \text{ で: } \mathbf{U}_{(R, \theta, 0)} = \mathbf{U}_{(R, \theta, As)} = 0,$$

$$\Theta_{(R, \theta, 0)} = +0.5, \Theta_{(R, \theta, As)} = -0.5$$

$$R = 1 \text{ で: } \partial \Theta / \partial R = 0, \partial U_Z / \partial R = -Re \partial \Theta / \partial Z,$$

$$R^2 \partial (U_\theta / R) / \partial R = -Re \partial \Theta / \partial \theta, U_R = 0.$$

計算法: 円筒座標系の上記の偏微分方程式を不等間隔格子上で差分化し, 非線形連立代数方程式を得た. なお,

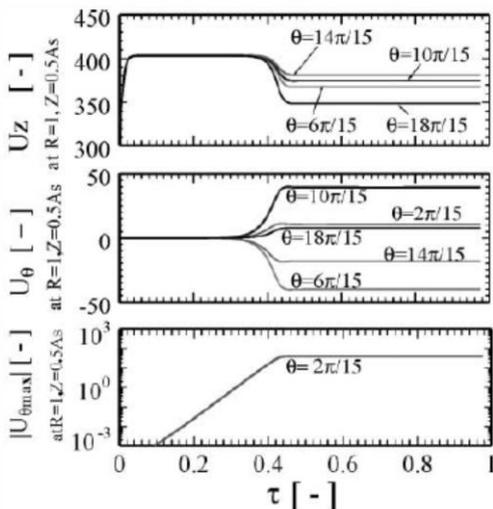


Fig.16 Time evolution of a 3-D stationary flow in a HZ liquid bridge of $Pr=0, As=0.6$ at $Re=5000$ ⁷⁶⁾.

対流項には 3 次精度の up-wind 法, 中心軸上の半径方向速度には Ozoe and Toh⁷⁵⁾ の方法を使用した. SIMPLEC を用いた圧力補正を行った. Bi-CGSTAB 法と Preconditioner を利用した完全陰解法型のプログラムコードを開発し, 九州大学計算機センターのベクトル計算機上で計算した. 使用した格子点数 (N_R, N_θ, N_z) はアスペクト比によって (38, 63, 34) ~ (26, 43, 36) を使用した ⁷⁶⁾.

計算にあたって指定するパラメータは Pr, As, Re である. まず, $Pr = 0, 0.01, 0.02$ について $As = 0.6 \sim 2.2$ の範囲で Re_{c1} および Re_{c2} を決定した ^{72-74,76)}.

$Pr = 0$ の液柱についての非定常数値解析結果の一例を Fig. 16 に示す ⁷⁶⁾. 図には液柱表面中央断面 ($Z = 0.5As$) 上の複数の位置での U_z, U_θ 及び U_θ の最大値の時間変化を示した. この Re の場合, $\tau > 0.07$ で表面上に周方向速度成分 U_θ が発生しその最大値は時間とともに指数関数的 $[(\exp(\beta\tau))]$ に増加し, $\tau > 0.4$ で一定値に収束し, Fig. 17 に示す周方向波数 $m = 3$ の 3 次元定常流が完成する. Re を変えて同様な計算を実施し, U_θ の最大値の成長係数 β を Re に対してプロットし, $\beta = 0$ となる Re が 3 次元定常流遷移の臨界レイノルズ数 Re_{c1} となる. このような方法で各アスペクト比における第 1 臨界条件 $\{Re_{c1}, m_{c1}\}$ が決定できる.

さらに大きな Re を用いた数値解析を行うと, 振動流を得る. Figure 18 は $As = 1.4, Re = 5840$ での計算結果 ⁷⁶⁾ である. この場合, 時間経過とともに軸対称流が不安定化し, 3 次元非振動流へと遷移するが, 3 次元非振動流が十分成長する以前に振動流が発生し, $0.17 < \tau < 0.7$ の範囲

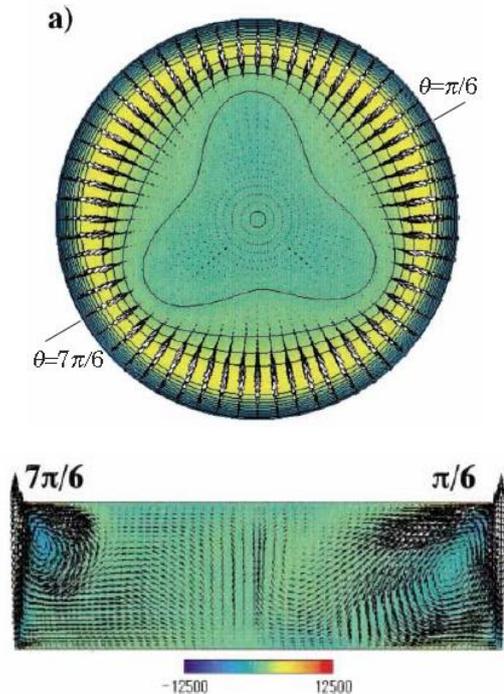


Fig. 17 3-D stationary flow of $m=3$ in a HZ of $Pr=0, As=0.6, Re=5000$. a) θ component of vorticity on a horizontal cut at $Z=0.57$. b) Vectors on a vertical cut $\pi/6 \sim 7\pi/6$ ⁷⁶⁾.

では中心軸上の U_R の振動振幅は指数関数的に増加する。 Re_{c1} 決定と同様な方法で振動流への遷移に対応する第2臨界レイノルズ数 Re_{c2} を決定する。また、振動数についても同様な手法で臨界角振動数 $\omega_{c1} = 2\pi f a^2 / \nu$ を決定できる。この期間の振動流は周方向波数 $m = 2$ で、(2+1)タイプの振動を示している。この振動は Levenstam *et al.*⁷¹⁾ の報告と同じタイプで、特徴は $m = 2$ の3次元定常流の中心部

が Z 軸を横切って半径方向に振子のように往復運動することである (Fig. 19)。さらに $0.7 < \tau$ では中心軸上の U_R の振幅は減衰し $1 < \tau$ では軸を横切る流れはほぼ消滅し、 Z 軸の周りのねじれ振動 (2T) タイプの振動 (Fig. 20) へと遷移する。

$Pr = 0, 0.01, 0.02$ についての第1および第2臨界レイノルズ数と周方向波数および振動のタイプを纏めて Fig. 21

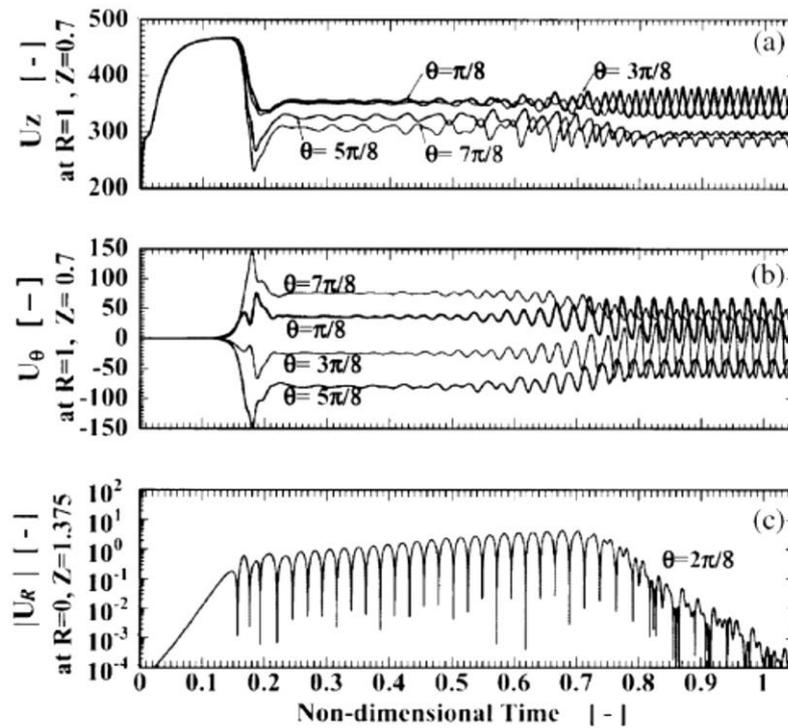


Fig. 18 Time evolution of a 3-D oscillatory flow in a HZ liquid bridge of $Pr = 0, As = 1.4$ at $Re = 5850$ ⁷⁶⁾.

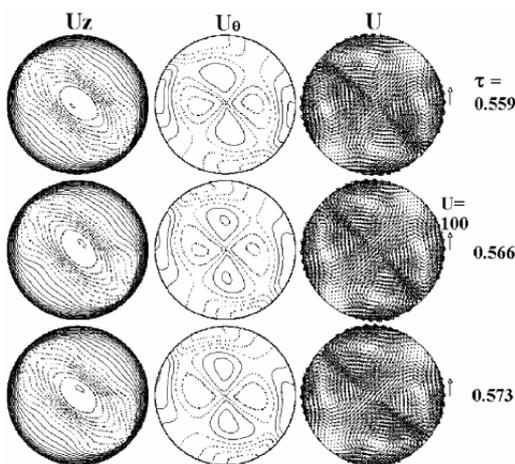


Fig. 19 Snapshots of velocity distributions on $Z=0.7$ of a HZ liquid bridge of $Pr=0, As=1.4$ at $Re=5840$, during a half period of (2+1) oscillations in Fig. 18 at $\tau \approx 0.55$ ⁷⁶⁾.

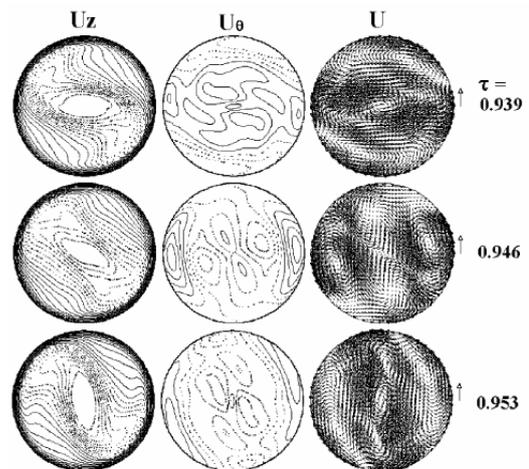


Fig. 20 Snapshots of velocity distributions on $Z=0.7$ of a HZ liquid bridge of $Pr=0, As=1.4$ at $Re=5840$, during a half period of (2T) oscillations in Fig.18 at $\tau \approx 0.7$ ⁷⁶⁾.

に示した⁷⁶⁾。この程度の Pr 範囲では, $As = 1.2$ の近傍を除き, 臨界レイノルズ数の Pr による変化は小さく, アスペクト比依存性の方が顕著である。(ただし, マランゴニ数 ($Ma=RePr$) で整理すると, $Ma_c \propto Pr$ となる。) Re_c の値が Pr に依存せずほぼ一定となることは, これらの遷移が hydrodynamic な不安定化機構によって生じることを示唆している。なお, 本数値解析で得られた Re_{c1} の値は, 線形安定解析の結果, あるいは 2 次元定常流れを初期条件とした非線形数値解析の結果に比して, 5~9% 大きい。その原因は, 我々の数値解析は, 初期条件として静止状態を仮定しており, 他の数値解析や線形安定解析の初期条件 (軸対称定常流場) と異なるためと思われる。つまり, 解析最初の軸対称非振動流や 3 次元定常流が十分発達する前に遷移を起こす状況下での成長係数を基に臨界条件を定めているため, 他の研究例よりも大きな Re_{c1} が得られたと考えられる。

モデル 2: Figure 22 に示すように, 液柱の上下に鉄のサポートロッドを設置し, 最初ロッドおよび液柱はすべて温度 T_0 で一様であり, $t = 0$ 以降, 加熱ロッドの上端, 下端の温度を一定⁷⁷⁾ あるいは時間の関数⁷⁸⁻⁸¹⁾ として与えた場合についてシミュレーションし, 実験において計測される温度データから, 真の臨界条件を決定するための基礎データを取得することを目的とする。そのため, 液柱-サポートロッド界面から $\delta = 0.5\text{mm}$ ロッド内に設置された熱電対位置における温度, 液柱-ロッド界面上の

複数位置における温度などを計算する。基礎方程式はモデル 1 の基礎式に上下のロッド内の非定常伝導熱の式を加え, 境界条件には, 上下の液柱-ロッド界面で熱フラックスの連続の式を加える。

以下に $As = 1.22$, $a = 3.0\text{ mm}$, $As_r = 2$ の錫液柱のサポートロッド両端に Figure 23 の温度を課した場合の結果⁷⁹⁾ を示す。液柱内の有効温度差 ΔT_e を次式で定義し, 各時間におけるマランゴニ数を $Ma = \sigma_T \Delta T_e a / \mu \alpha$ で算出する。

$$\Delta T_e = \left\{ \int_0^{2\pi} T(a, \theta, L) a d\theta - \int_0^{2\pi} T(a, \theta, 0) a d\theta \right\} / 2\pi$$

表面上の周方向速度 U_θ は最初零であるが, $t = 303.5\text{ s}$ 以降零から偏倚し, 第 1 臨界を超えたことを示している。

Figure 24 中の \times で示した時点での臨界マランゴニ数は

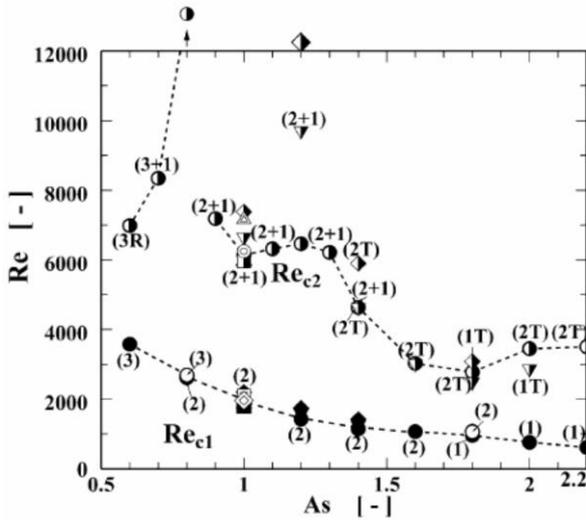


Fig.21 Stability map of Marangoni flow in HZ liquid bridges of low Pr fluids: $Pr=0, 0.01$ and 0.02 ⁷⁶⁾. Numerals beside each key represents m and oscillation mode. Dotted lines are for $Pr=0$.

$$Pr=0: (\bigcirc) Re_{c1}, (\bigcirc) Re_{c2})^{76)} (\blacksquare) Re_{c1}, (\square) Re_{c2})^{62)} (\blacktriangle) Re_{c1}, (\triangle) Re_{c2})^{38)}$$

$$Pr=0.01: (\blacktriangledown) Re_{c1}, (\blacktriangle) Re_{c2})^{76)} (\diamond) Re_{c1}, (\circ) Re_{c2})^{62)}$$

$$Pr=0.02: (\blacklozenge) Re_{c1}, (\blacktriangleright) Re_{c2})^{76)} (\boxtimes) Re_{c1}, (Re_{c2})^{38)}$$

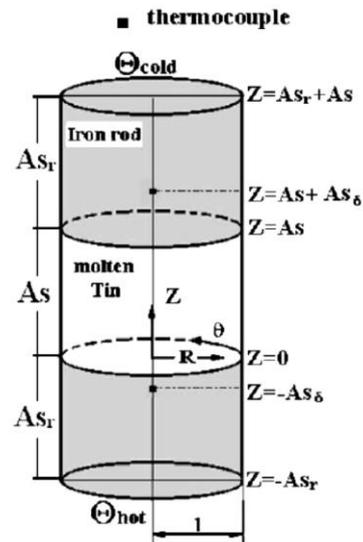


Fig. 22 Configuration of Model 2

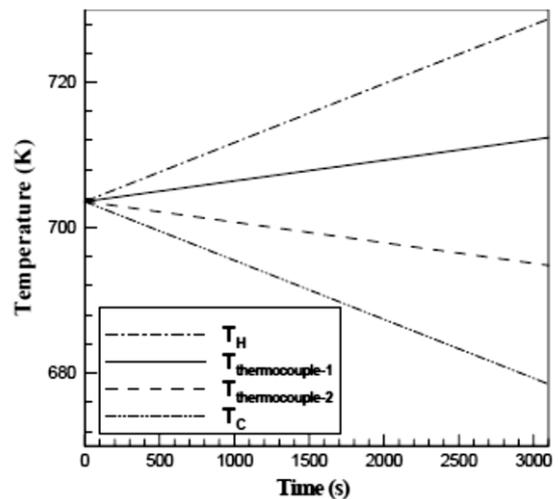


Fig. 23 Ramped temperatures imposed on both ends of the supporting rods and the temperatures at the thermocouple positions⁷⁹⁾.

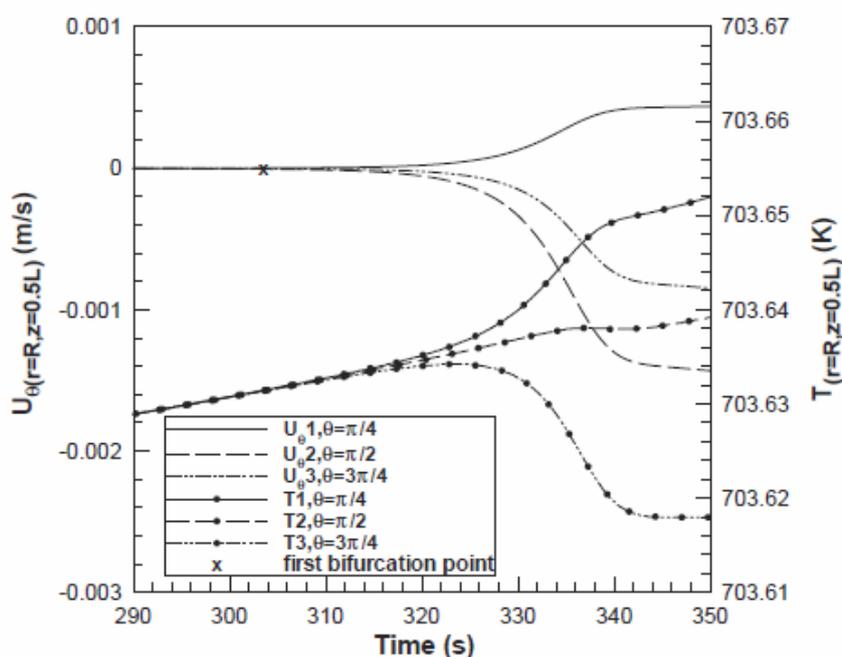


Fig. 24 Time evolutions of local velocity and temperature on the surface ($z=0.5L$) during the first flow transition period⁷⁹⁾.

$Ma_{c1} = 15.68$ となる. Chen *et al.*³⁶⁾の $Pr = 0.02$ に対する線形解析結果の近似式表現式 ($Re_c = 2160As^{-1.26}$) から得られる値 $Ma_c = PrRe_c = 15.13$ にきわめて近い. しかし表面温度の変化で検出するには, $0.005K$ の感度の温度計測機をもってしても 10% 程度の誤差が発生する.

さらに時間が経過し温度差が大きくなると, 十分発達した3次元定常流 (Fig.25) の状態を経て, 第2臨界条件に達する. この時期の中心軸上の Ur の最大値および表面温度の変化を Fig.26 に示した. 最も敏感な指標である U_r が振動を開始するのは $t = 1655.2s$ で $Ma_{c2} = 81.7$, この時点での振動は $(2+1)$ タイプで $f = 0.54Hz$ となる. しかし, 表面温度の振動ははるかに遅れて発生し, その時点では Ma は 90.6 , $f = 0.565Hz$ となる.

シミュレーションの全期間での表面温度の変化を示す Fig. 27 から, 軸対称流から3次元非振動流, さらに3次

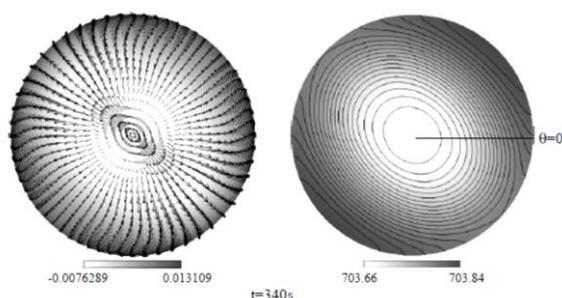


Fig. 25 Velocity and temperature distributions on the mid plane ($z=0.5As$) of a 3D stationary flow of $m=2$ at $t=340s$ ⁷⁹⁾.

元非振動流から振動流へと遷移するのみならず, 振動のタイプも温度差の上昇とともに変化することが分かる. 振動開始時は $(2+1)$ タイプであった振動が $t = 2070$ から $2T$ タイプの振動も加わり, $2120s$ 以降 $2T+1$ タイプの振動となり, 振動数は $0.65 \sim 0.77 Hz$ の $(2+1)$ タイプ振動の周波数が, $0.039 \sim 0.052 Hz$ の $2T$ タイプの振動数で変調されている. $t = 2350s$ 以降 $+1$ タイプの振動は急速に弱まり, $2T$ タイプの振動が優勢になり, さらに $t = 2500s$ 以降の大きな温度差の下では, $2T$ タイプの振動場全体が極めて低速で反時計回りに回転する $2T-R$ タイプへと変化する. この回転による周波数は $0.0026 Hz$ 程度である.

このシミュレーションは, 温度差が時間的に変化する液柱の場合には, どの量を, どれだけ高感度で計測できるかで, 臨界マランゴニ数が大きく変化することを示唆している. また, 昇温速度を 6 倍にすると, Re_{c1} の値は 33% , Re_{c2} の値は約 3% 大きくなることも示された⁷⁹⁾. このことから, 温度計測の感度は可能な限り高感度, 高精度にすることが必須であり, また昇温速度は可能な限り遅く設定することが必要なことを示唆している.

さらに, 温度差 ΔT を時間とともに増加させるシミュレーションにおいて3次元定常流へと遷移した後, 振動流へと遷移するまでの間に, 波数の異なる3次元定常流へと遷移する例が見られた^{80,81)}. Figure 28 に $As = 0.8$ の液柱の例を示す. $T = 560s$ で $m = 2$ の3次元定常流 (Fig. 29-a) へと遷移する ($\Delta Te = 1.80K$, $Ma_{c1} = 24.71$). 軸対称流から3次元定常流への遷移に伴う表面温度の周方向の変化は, 表面速度の変化より若干遅れて発生し, その値は極めて小さい. さらに時間が経過し $t = 1180 s$ からゆっくりと速度・

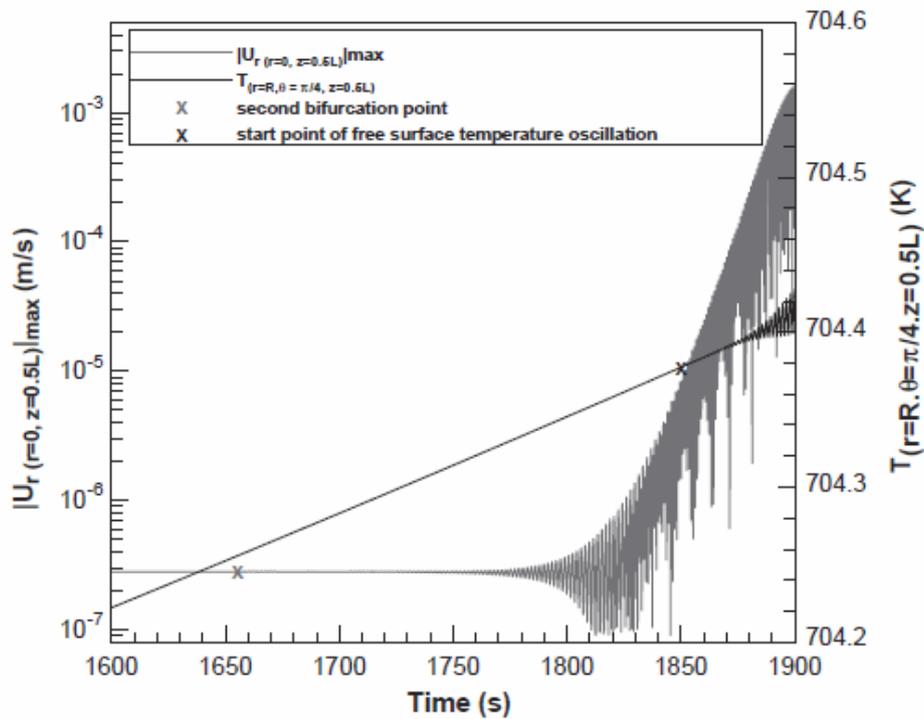


Fig. 26 Time evolution of radial velocity U_r on the z axis and surface temperature at $z=0.5L$ during the second flow transition period⁷⁹⁾.

温度の分布形状変化が始まり、1460秒頃にはFig. 29-b に示す $m=2$ と3の混成パターンを持つ3次元定常流への遷移が完成する。この第2の定常流-定常流間遷移に伴う周方向の温度差は、 Ma_{c1} における値の10倍以上の大きな値を示す。この例での振動流発生時刻は $t = 1640$ s, $\Delta Te = 5.16$ K, $Ma_{c2} = 70.84$ であるが、Fig. 28 に示した時間範囲内では表面流速・温度の振動は検知できない。

このような定常流 - 定常流間遷移は従来まったく知ら

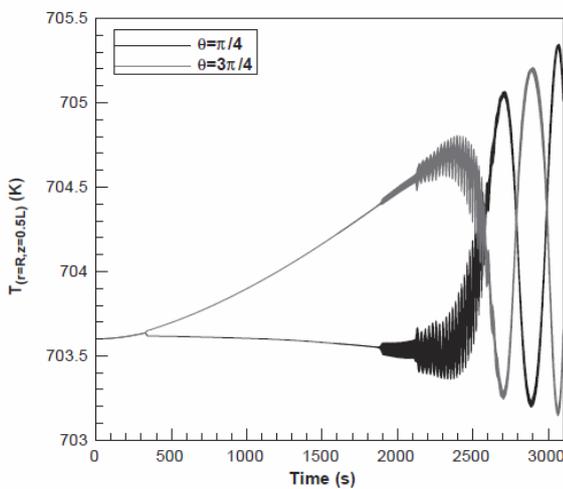


Fig. 27 Time evolution of surface temperatures at $z=0.5L$ ⁷⁸⁾.

れていなかった現象である。このシミュレーションから、実験においては、極めて高感度な温度計測システムが必要であることはもちろん、 Ma_{c1} における微細な温度変化を見逃さず、また、定常流 - 定常流間遷移に伴う大きな温度変化に惑わされぬよう、十分な注意が必要であることが分かる。

地上実験の場合、浮力の影響が加わり、さらに液柱形状は下膨れになる。これらの影響に関する数値解析については文献 81-83) に詳しい記述がある。

また、振動流の変動成分の構造を Proper-orthogonal decomposition で解析したが、時空間構造は複雑で、再構築には多数のモードの繰込みが必要であった⁸⁴⁾。

2.2.3 S パラメータ

液柱における振動流開始点については、高プラントル数液体 ($Pr \geq 10$) を中心として多くの実験データが存在するが、データは互いに相反するなど統一的な傾向を示していない。これは浮力、液柱形状や液柱表面からの熱損失など副次的な効果が影響していると考えられる。

この理由から Masud *et al.*⁸⁵⁾ はこれらの効果が振動流遷移に与える影響について実験的に注意深く検証を行った。これらの効果が最低限に抑えられたデータおよび当時入手可能だった微小重力環境で取得されたデータは、マランゴニ数 (Ma) だけでは振動流開始点を表すことが出来ず、特に臨界マランゴニ数 (Ma_c) は液柱のサイズの増加に伴って増加することを示していた。そして、振動

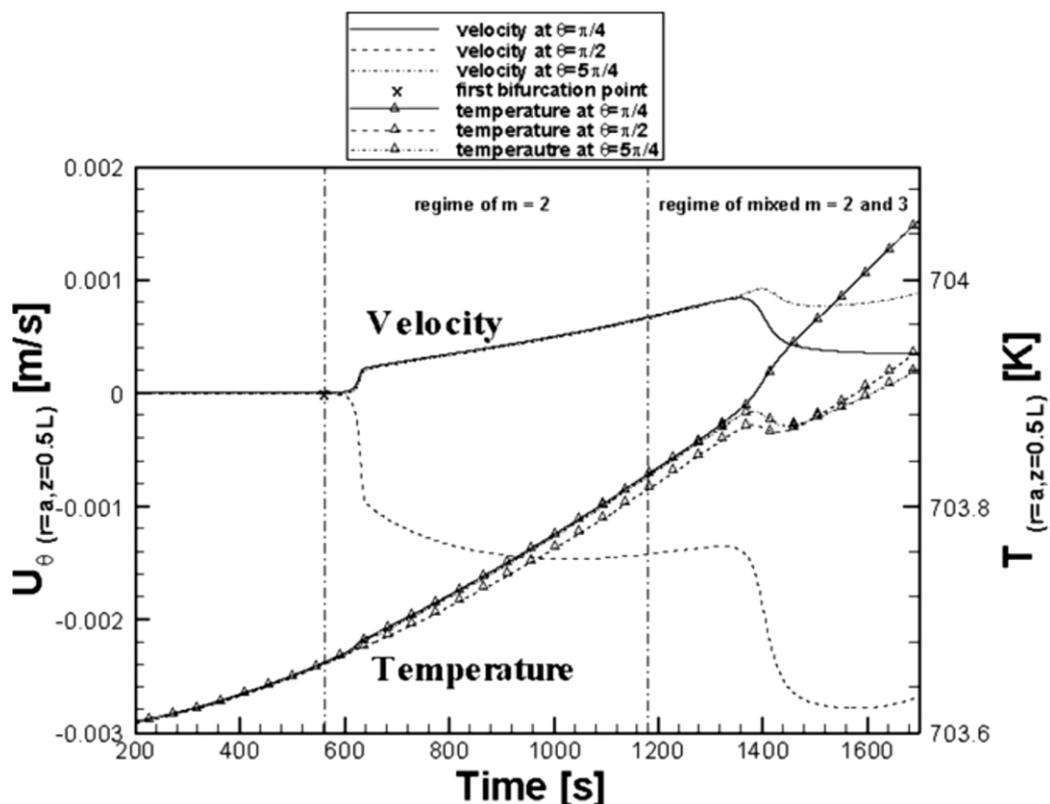


Fig. 28 Time evolutions of three-dimensional stationary flow in liquid bridge of $As = 0.8$. Azimuthal velocities and temperatures observed at three different points at $z = 0.5L$ are plotted as a function of time⁸⁰⁾.

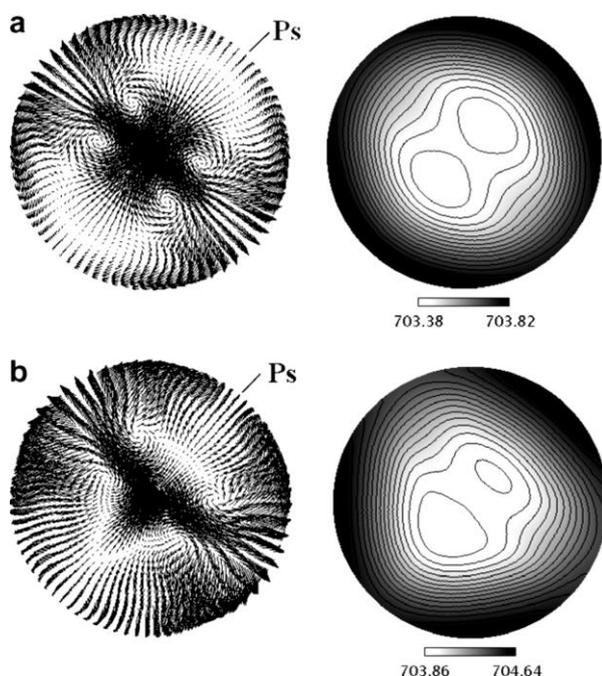


Fig. 29 Two different 3 dimensional stationary flow modes observed between Ma_{c1} and Ma_{c2} in the simulation of Fig. 28. a: at $Ma = 44.90$, $m = 2$ at. b: at $Ma = 60.03$, $m = 2+3$ ⁸⁰⁾.

流遷移条件を規定するには追加のパラメータが必要であると結論づけた。

更に最近の宇宙実験 (MEIS-1, MEIS-2) の結果から、過去の微小重力環境での実験は“定常”の条件を満たしていないことが示され、臨界マランゴニ数 (Ma_c) が液柱の大きさに依存するかは未解決のままである。

しかしながら、Kamotani *et al.*^{86,87)} は、円筒容器内に発生する振動流マランゴニ対流の実験をスペースシャトルでの微小重力を用いて行っている (この実験は STDCE (Surface Tension Driven Convection Experiment) と呼ばれている)。円筒の皿を用いるメリットの一つは、液柱に比較すると如何なるサイズにおいても 1G (地上) と微小重力とで同じ大きさの実験系を用いられることである (もともと、1G ではサイズの増加に伴って、浮力の効果が大きくなるが)。従って、容器サイズの効果を広い範囲で容易に調べることが可能である。流れの安定性について、微小重力実験を含む全てのケースについて注意深く実験が行われた。その結果、皿の直径が 1.1 cm では地上及び微小重力実験で Ma_c は同じ値となり、この直径以下では地上における浮力の効果は無視できるほど小さいことが明らかとなった⁸⁷⁾。地上実験結果は、明確に直径 D の増加に伴って Ma_c が増加する傾向を示した。微小重力下でのデータも、STDCE 装置の最大直径の 3cm までに

において、地上実験での D 依存性を延長したライン上にプロットされる結果を得た⁸⁷⁾。

上述の宇宙実験結果が明らかとなる以前においても、**Kamotani et al.**^{88,89)} は地上実験の結果から 1980 年代に追加のパラメータの必要性を認識していた。**Kamotani et al.** は、自由表面問題であることに着目し、追加パラメータは自由表面に関連したものであるとし、まず Pr 数に対して $\sigma_T \Delta T / \sigma$ の様式と取るキャピラリー数仮定してこの問題を取り扱った⁸⁸⁾。次に **Lai**⁸⁹⁾ は、自由表面の動的変形に関するスケール解析結果から、 S パラメータと ($1/Pr$) $\sigma_T \Delta T / \sigma$ で与えられる) を導出した。

振動流において、動的界面変形量は顕微鏡でなければ特定できないほど微小なものである。果たしてそのような微小な変形が振動流遷移のメカニズムにおいて重要な役割を担うのであろうかと言う疑問が生じる。これは非常に難しい問題であったが、**Kamotani and Ostrach**⁹⁰⁾ が表面変形の運動に関する詳細なスケール解析を行い初めて答が得られた。

高 Pr 数流体の表面張力対流の重要な特徴は、振動流遷移が発生する Ma 数領域において、その駆動力が“hot corner”と呼ばれる加熱壁近傍の小さな領域のみに限定して発生することである⁹⁰⁾。結果として、hot corner における非常に微小な表面の動的変形であっても、流れの駆動力が変化して振動流へ移行する。

彼らは、表面温度分布、速度場と自由表面変形が複雑に絡んだ非線形挙動を含めた振動のメカニズムを推測した。

速度場は、高温領域から低温に流れる表面流と高温端へ流れる内部のリターン流に大別される。流れが定常的である場合、表面流とリターン流はバランスしている。しかし、遷移過程においては両者のバランスしていない場合、この不均衡が表面の温度分布を著しく変化させ、その結果として全体の流れ場を大きく変え得る。

リターン流は表面流によって生じる圧力勾配によって駆動される (**Fig. 30**) のとおり、リターン流は、表面流によって生じた hot corner 近傍の低圧領域に流れ込む。自由表面近傍の圧力は、自由表面の形状によって決まるため、リターン流は自由表面の形状と密接な関係があるのである。結局、表面流が局所的に変化した時、有限の

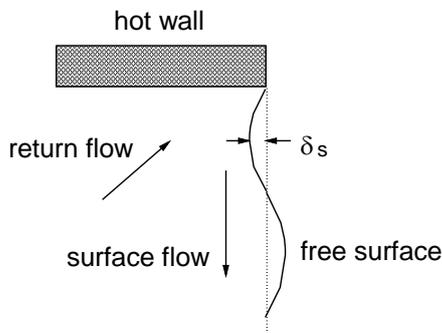


Fig. 30 Flow field and free surface deformation in hot corner

時間遅れの後に表面形状の変化がこれに追従して、最終的にリターン流の変化へとつながっていく。**Kamotani and Ostrach**⁹⁰⁾ は、振動流における自由表面の変形量 (**Fig. 30** 中の δ_s) を次式で推定した

$$\left(\frac{\delta_s}{\Delta}\right) \sim \frac{\rho U_0 \Delta}{\sigma}$$

ここで Δ は hot corner の大きさ、 U_0 は hot corner における代表的な表面流速、 σ は表面張力である。定常流のスケール解析に基づくと、以下のスケール側が成り立つ

$$\frac{\Delta}{L} \sim Ma^{-1/2}, \quad \frac{\mu U_0}{\sigma_T \Delta T} \sim Ma^{-1/7}$$

ここで L は液柱の代表長、 σ_T は表面張力の温度係数である。上の 2 式から、以下のとおり $(\delta_s/\Delta)^2$ で整理されるパラメータが得られ、これを S パラメータと呼ぶ。

$$S \equiv \left(\frac{\delta_s}{\Delta}\right)^2 = \frac{\sigma_T \Delta T}{\sigma} \frac{1}{Pr} Ma^{3/14}$$

これは以前用いていた S パラメータ ($= (1/Pr) \sigma_T \Delta T / \sigma$) とは若干異なる。この様式の S パラメータは様々なスケール則と関連しているため、 S パラメータは取り扱う問題によって異なる表現となる。

STDCE の場合、 S パラメータは以下の様に表現される⁸⁶⁾

$$S = \left(\frac{\rho \alpha^2}{\sigma R}\right)^{1/2} Ma \quad \text{for STDCE configuration}$$

ここで α は流体の熱拡散率、 R は容器の半径である。**Figure 31** のとおり、この様式で表現された S パラメータにより 1G 及び微小重力実験の結果を統一的に整理できる。

S パラメータの定式化がなされた直後、液柱のコンフィギュレーションにおいては振動流の起点を規定するために別のパラメータを考慮する必要性が明らかとなってきた。それは、自由表面での熱伝達に関わるパラメータである。**Masud, et al.**⁸⁵⁾ は、典型的な地上実験における液柱実験における (表面からの) 熱損失にかかるビオ数 (Bi) は 0.25 程度と見積もっていて、比較的小さいため熱伝達

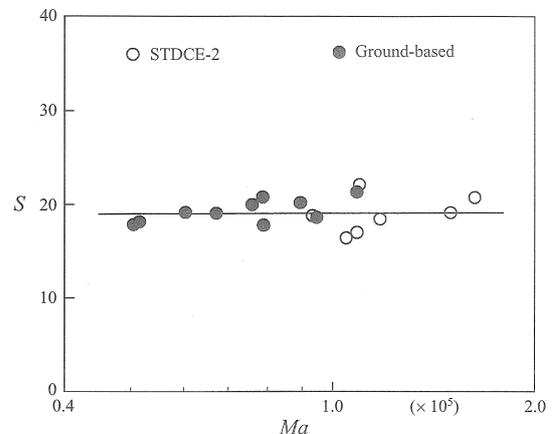


Fig. 31 Critical S -parameter for STDCE tests ($Pr = 26 - 29$)

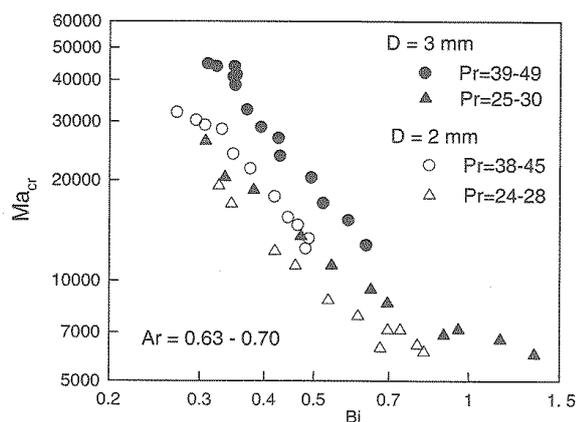


Fig. 32 Correlation of Ma_c with Bi

の影響は無視できるとした。

しかし、そうではないことが明らかとなった。異なる実験条件（異なる低温端と雰囲気ガス温度）のデータに基づき、Kamotani *et al.*は、 Ma_c が自由表面における熱伝達に大きく左右されることが分かった⁹¹⁾。Kamotani *et al.*は、液柱周りの空気流の数値シミュレーションを行い、これに基づき自由表面の熱伝達の効果をビオ数 (Bi)によって表現した⁹²⁾。その結果を Fig. 32 に示す。図より明らかのように、 Ma_c はビオ数に非常に敏感である。ビオ数が0.3から0.7に変化すると Ma_c は5倍変化する。この極端な鋭敏性は、以下の実験事実とも一致する。即ち、液柱の周りに薄い円柱のディスクを（液柱に触れないように）配置した場合、ある特定の位置にディスクを置くと振動流れが著しく影響を受けたのである⁹²⁾。

定常流の場合、ディスクの存在によるビオ数の変化はほとんど流れに影響を与えないため、この現象を説明することは難しい。

CFD 研究ではこのような臨界マランゴニ数の強いビオ数依存性は予測されていなかった。更に、 Ma_c は周囲雰囲気から自由界面に熱が流入する heat gain 状態においてはビオ数依らずば一定となる⁹³⁾。対照的に、STDCEにおける振動流は Bi 数に対して鈍感である⁹⁴⁾。1Gにおけるビオ数が1より小さいことを考慮すると、STDCEの実験結果の方がより合理的に納得が行く結果である。

上述の観察から、液柱形状では、何か特別なことが起きていると思われ、それは Bi 数や全体的な熱損失では説明が出来ないのかもしれない。Sパラメータは Ma_c が自由表面の動的変形に非常に鋭敏であるとの仮説に基づいており、（これに基づけば）熱損失が何らかの形で表面変形を起こすため、臨界マランゴニ数 Ma_c は、表面熱損失に敏感であると結びつけられる可能性がある。

しかしながら、これでは、STDCEの実験系において Ma_c がSパラメータに関連しているが、表面熱損失に敏感でないことの説明が付かない。

液柱の実験系に於いては 上述の特異な現象を説明するために、もっと多くの検討が必要であるが、まず液柱形状におけるSパラメータの妥当性を検証しなければならない。

参考文献

- 1) エリ・ランダウ, イエ・リフシツ: 流体力学1, 東京図書, 1987.
- 2) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, 2001.
- 3) 巽友正: 流体力学, 培風館, 1996.
- 4) 保原充, 大宮司久明 編: 数値流体力学 基礎と応用, 東大出版会, 1995.
- 5) 日本機械学会: 流体計測法, 日本機械学会, 1994.
- 6) 可視化情報学会 編: 流れの可視化入門, 朝倉書店, 1997.
- 7) 可視化情報学会 編: 可視化技術の手ほどき, 朝倉書店, 1998.
- 8) 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, 1996.
- 9) 新井康平: ウェーブレット解析の基礎理論, 森北出版, 2002.
- 10) 小林敏雄 編: 数値流体力学ハンドブック, 丸善, 2003.
- 11) H. Kawamura, K. Nishino, S. Matsumoto, I. Ueno: J of Heat Transfer, **134** (2012) 031005.
- 12) NASDA Technical Memorandum, Annual Report of Marangoni Convection Modeling Research, NASDA-TMR-030004E, 2003.
- 13) Croell: Mat. Res. Bull., **24** (1989) 770.
- 14) Y. K. Yang and S. Kou: J. Crystal Growth, **222** (2001) 135.
- 15) T. Azami, S. Nakamura and T. Hibiya: J. Crystal Growth, **231** (2001) 82.
- 16) K. Takagi, M. Otaka, H. Natsui, T. Arai, S. Yoda, Z. Yuan, K. Mukai, S. Yasuhiro and N. Imaishi: J. Crystal Growth, **233** (2001) 399.
- 17) S. Matsumoto, H. Hayashida, S. Yoda, A. Komiya, H. Natsui and N. Imaishi: Thermal Sci. Eng., **12** (2004) 21.
- 18) N. Imaishi, S. Yasuhiro, Y. Akiyama and S. Yoda: J. Crystal Growth, **230** (2001) 164.
- 19) S. Yasuhiro, N. Imaishi, Y. Akiyama, S. Fujino and S. Yoda, J. Crystal Growth, **262** (2004) 631.
- 20) S. Yasuhiro, K. Li, N. Imaishi, Y. Akiyama, H. Natsui, S. Matsumoto and S. Yoda: J. Crystal Growth, **266** (2004) 152.
- 21) H.C. Kuhlmann and Ch. Nienhüser: Fluid Dynamics Res. **31** (2002) 103.
- 22) Ch. Nienhüser and H.C. Kuhlmann: J. Fluid Mech. **458** (2002) 35.
- 23) Y. Kamotani and S. Ostrach: J. Heat Transfer, **120** (1998) 758.
- 24) I. Ueno, S. Tanaka and H. Kawamura: Phys. Fluids, **15** (2003) 408.
- 25) 田中志保, 上野一郎, 河村洋: 日本機械学会論文集 (B 編), **70** (2004) 997.
- 26) D. Schwabe, P. Hintz and S. Frank: Microgravity Sci. Technol., **IX/3** (1996) 163.
- 27) J. Shiomi, M. Kudo, I. Ueno, H. Kawamura and G. Amberg: J. Fluid Mech., **496** (2003) 193.
- 28) J.J. Xu and S.H. Davis: Phys. Fluids, **27** (1984) 1102.
- 29) I.I. Ryzhkov: Phys. Fluids, **23** (2011) 082103.
- 30) M.K. Smith and S.H. Davis: J. Fluid Mech., **132** (1983) 119., J. Fluid Mech., **132** (1983) 145.
- 31) D.D. Joseph: Stability of Fluid Motions I,II", Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume **27,28**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- 32) Y. Shen, G.P. Neitzel, D.F. Jankowski and H.D. Mittelmann: J. Fluid Mech., **217** (1990) 639.
- 33) G.P. Neitzel, C.C. Law, D.F. Jankowski and H.D. Mittelmann: Phys. Fluids, **A3** (1991) 2841.
- 34) R. Velten, D. Schwabe and A. Scharmann: Phys. Fluids, **A3** (1991) 267.
- 35) G.P. Neitzel, K.T. Chang, D.F. Jankowski and H.D. Mittelmann: Phys. Fluids, **A5** (1993) 108.

- 36) G. Chen, A. Lizée, and B. Roux: *J. Crystal Growth*, **180** (1997) 638.
- 37) Ch. Nienhüser and H.C. Kuhlmann: *J. Fluid Mech.*, **458** (2002) 35.
- 38) M. Levenstam, G. Amberg and C. Winkler: *Phys. Fluids*, **13** (2001) 807.
- 39) M.K. Ermakov and M.S. Ermakova: *J. Crystal Growth*, **266** (2004) 160.
- 40) Q.S. Chen and Y.N. Jiang: *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, **39** (2012) 1542.
- 41) K. Fujimura: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **82** (2013) 074401.
- 42) H.C. Kuhlmann and H.J. Rath: *J. Fluid Mech.*, **247** (1993) 247.
- 43) M. Wanschura, V.M. Shevtsova, H.C. Kuhlmann and H.J. Rath: *Phys. Fluids*, **7** (1995) 912.
- 44) M. Wanschura, H.C. Kuhlmann and H.J. Rath: *Phys. Rev.*, **E55** (1997) 7036.
- 45) L. Kahouadji, B.C. Houchens, and L. Martin Witkowski: *Phys. Fluids*, **23** (2011) 104104.
- 46) A.Y. Gelfgat, A. Rubinov, P.Z. Bar-Yoseph, and A. Solan: *Fluid Dyn. Mater. Process*, **1** (2005) 21.
- 47) Y. Huang, K.E. Davis, H.Li and B.C. Houchens: in *Proceedings of PACAM XI, Foz do Iguacu, Brazil*, 2010.
- 48) J.S. Walker, L. Martin Witkowski and B.C. Houchens: *J. Crystal Growth*, **252** (2003) 413.
- 49) O. Bouizi, C. Delcarte and G. Kasperski: in *61th International Symposium on Transport Phenomena*, 2005, Prague.
- 50) O. Bouizi, C. Delcarte and G. Kasperski: *Phys. Fluids*, **19** (2007) 114102.
- 51) G. Kasperski, A. Batoul and G. Labrosse: *Phys. Fluids*, **12** (2000) 103.
- 52) E. Chénier, C. Delcarte, G. Kasperski and G. Labrosse: *Phys. Fluids*, **14** (2002) 3109.
- 53) H.C. Kuhlmann, M. Wanschura, Ch. Nienhüser, J. Leyboldt, H. J. Rath, and S. Yoda: *NASDA-TMR-990007E* (1999) 189.
- 54) E. Chénier, C. Delcarte and G. Labrosse: *Phys. Fluids*, **11** (1999) 527.
- 55) S.A. Orszag: *J. Fluid Mech.*, **50** (1971) 689.
- 56) S. Chandrasekhar: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, 1961, UK.
- 57) H.D. Mittelmann, K.T. Chang, D.F. Jankowski and G.P. Neitzel: in *Bifurcation and Symmetry*, eds. E. Allgower, K. Bohmer and M. Golubitsky, Birkhauser-Verlag, Basel, 1992.
- 58) Q.S. Chen and W.R. Hu: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **41** (1998) 825.
- 59) T.P. Lyubimova and R.V. Skuridyn: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **69** (2014) 191.
- 60) D.A.R. Davis and F.T. Smith: *Computers & Fluids*, **37** (2008) 64.
- 61) K. Fujimura: *Proc. R. Soc.*, **A424** (1989) 373, *Proc. R. Soc.*, **A434** (1991) 719, *Proc. R. Soc.*, **A453** (1997) 181, 水鳥二郎, 藤村 薫: *流れの安定性*, 朝倉書店, 2003.
- 62) J. Leyboldt, H.C. Kuhlmann, and H.J. Rath: *J. Fluid Mech.*, **414** (2000) 285.
- 63) M. Golubitsky, I. Stewart and D.G. Schaeffer: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol.2, Springer-Verlag, 1988, Germany.
- 64) M. K. Smith: *J. Fluid Mech.*, **194** (1988) 391.
- 65) J. Leyboldt, H.C. Kuhlmann and H.J. Rath: *Z. Angew. Math. Mech.*, **81** (2001) S785.
- 66) 矢澤紗織: 諏訪東京理科大学大学院工学マネジメント研究科修士論文, 2011.
- 67) V. Shevtsova, D. E. Melnikov and A. Nepomnyashchy: *Phys. Rev. Lett.*, **102** (2009) 134503.
- 68) C.E. Chang and W.R. Wilcox: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19** (1976) 355.
- 69) C.E. Chang and W.R. Wilcox: *J. Crystal Growth*, **28** (1975) 8.
- 70) R. Rupp, G. Mueller and G. Neumann: *J. Crystal Growth*, **97** (1989) 34.
- 71) M. Levenstam and G. Amberg: *J. Fluid Mech.*, **297** (1995) 357.
- 72) N. Imaishi, S. Yasuhiro, T. Sato and S. Yoda: *Proc. Mat. Res. in Low Gravity 2, SPIE Int. Symp. Optical Sci. Eng. and Instrumentation*, **3792** (1999) 344.
- 73) N. Imaishi, S. Yasuhiro, T. Sato and S. Yoda: *Proc. 4th JSME/KSME Thermal Engineering Conf.*, **3** (2000) 277.
- 74) S. Yasuhiro, T. Sato, N. Imaishi and S. Yoda: *Space Forum*, **6** (2000) 39.
- 75) H. Ozoe, K. Toh: *Numer. Heat Transfer*, **B 33** (1998) 355.
- 76) N. Imaishi, S. Yasuhiro, Y. Akiyama and S. Yoda: *J. Crystal Growth*, **230** (2001) 164.
- 77) S. Yasuhiro, N. Imaishi, Y. Akiyama, S. Fujino and S. Yoda: *J. Crystal Growth*, **262** (2004) 631.
- 78) S. Yasuhiro, K. Li, N. Imaishi, Y. Akiyama, H. Natsui, S. Matsumoto and S. Yoda: *J. Crystal Growth*, **266** (2004) 152.
- 79) K. Li, S. Yasuhiro, N. Imaishi, S. Yoda: *J. Crystal Growth*, **280** (2005) 620.
- 80) K. Li, B. Xun, N. Imaishi, S. Yoda and W.R. Hu: *Int. J. Heat Fluid Flow*, **29** (2008) 1190.
- 81) K. Li, W.R. Hu, S. Matsumoto, N. Imaishi: *Marangoni Flow in Floating Half Zone of Molten Tin*, to be submitted.
- 82) M. Lappa, R. Savino, R. Monti: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44** (2001) 1983.
- 83) M. Lappa, S. Yusushiro and N. Imaishi: *Int. J. Num. Methods Heat Fluid Flow*, **13** (2003) 309.
- 84) K. Li, N. Imaishi, C.J. Jing, S. Yoda: *J. Crystal Growth*, **307** (2007) 155.
- 85) J. Masud, Y. Kamotani and S. Ostrach: *J. Thermophysics and Heat Transfer*, **11** (1997) 105.
- 86) Y. Kamotani, S. Ostrach and J. Masud: *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **42** (1999) 555.
- 87) Y. Kamotani, S. Ostrach and J. Masud: *J. Fluid Mech.*, **410** (2000) 211.
- 88) Y. Kamotani, S. Ostrach and M. Vargas: *J. Crystal Growth*, **66** (1984) 83.
- 89) C-L. Lai: Ph.D. thesis, Case Western Reserve University, 1984.
- 90) Y. Kamotani and S. Ostrach: *J. Heat Transfer*, **120** (1998) 758.
- 91) Y. Kamotani, L. Wang, S. Hatta, R. Selver and S. Yoda: *J. Jpn. Soc. Microgravity Appl.*, **18** (2001) 283.
- 92) Y. Kamotani, L. Wang, S. Hatta, A. Wang and S. Yoda: *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **46** (2003) 3211.
- 93) A. Wang, Y. Kamotani and S. Yoda: *Int. J. Heat and Mass Transfer*, **50** (2007) 4195.
- 94) A. Wang, Y. Kamotani and S. Yoda: *J. Jpn. Soc. Microgravity Appl.*, **25** (2008) 207.