

■■■■ 原著論文 ■■■■

自由表面を局在化した低 Pr 液柱における 軸対称マランゴニ対流の振動流遷移： 遠心力および楕円型不安定性メカニズムの効果

白鳥 英^{1,2}・Hendrik C. KUHLMANN²・日比谷 孟俊²

Oscillatory Transition of Axisymmetric Flow in Partially Confined Thermo-capillary Bridges of Low- Pr Fluids: Effect of Centrifugal and Elliptic Instability Mechanisms

Suguru SHIRATORI^{1,2}, Hendrik C. KUHLMANN² and Taketoshi HIBIYA²

Abstract

The thermocapillary flow in half-zone liquid bridges of low-Prandtl-number fluids, when the free surface is partially confined by thin solid walls, is investigated numerically. The linear stabilities to three-dimensional disturbances and their physical destabilizing mechanisms are addressed for the axisymmetric steady flows, which are formed by changing the aspect ratio of the liquid bridge, the axial position of the free surface, and the ratio ξ of the free surface length to the full liquid height. A partial covering of the free surface adjacent to the cold disc significantly affects the axisymmetric steady toroidal vortices, especially the ellipticity of the streamlines. By decreasing ξ , the effect of the elliptic mechanism on the energy production of the disturbance diminishes, leading to four distinct instability modes, including two oscillatory modes. Each of the instability modes essentially consists of the elliptic instability and/or the centrifugal instability. For a sufficiently small ξ , the instability appears to be purely centrifugal. The range of the ξ in which the oscillatory modes take place becomes narrower, the smaller the aspect ratio of the whole domain. If the free surface is assigned on the cooling side, the instability is always the same as that for the unconfined half-zones.

1. 緒 言

気液界面に表面張力の勾配が存在すると、液体表面に沿って剪断力が働き、流体の運動が惹起される。このメカニズムはマランゴニ効果と呼ばれ、引き起こされる流れはマランゴニ対流と呼ばれる。温度差マランゴニ対流は結晶成長における不純物縞の形成要因のひとつとして問題とされ、その挙動解明と制御が求められている。二つの固体ディスク間に保持され、一方向温度勾配が課された、ハーフゾーンと呼ばれる液柱における流れは floating zone 結晶成長のモデルとして、マランゴニ対流現象とその安定性、解分岐などの研究のパラダイムとなっている。

ハーフゾーン液柱内温度差マランゴニ対流は、レイノルズ数 Re に代表される流れの駆動力の上昇に伴って、段階的に流れの形態が遷移することが知られている。遷移過程や不安定性メカニズムは、液体のプラントル数 (Pr) によ

って大きく異なり、熔融シリコンなどの低 Pr 流体においては、振動流への遷移の前に 3 次元定常流状態が存在することが特徴である¹⁾。

一般に低 Pr 流体は融点が高く、実験的には温度や雰囲気制御などの様々な困難を伴う。既往の研究においては、数値解析の研究では低 Re 流れについての報告が中心であり、一方、実験的には温度差を小さくすることが困難であることから、数値解析のものより数オーダー大きな Re 条件での研究が中心である²⁾。不透明な液体である低 Pr 流体の研究においては、数値解析と実験との相互理解が特に重要であるが、情報量の少ない実験データを、数オーダー異なる Re 条件での数値解析からの知見と比較参照しているのが現状である。最近では、熔融スズを用いた実験によって、振動流への遷移³⁾や 3 次元定常流への遷移条件に関する研究⁴⁾が成果を挙げ始めているが、低 Re 条件での実験的検証は明らかに不足している。

-
- 1 東京都立科学技術大学航空宇宙システム工学科 〒191-0065 日野市旭が丘 6-6
Department of Aerospace Engineering, Tokyo Metropolitan Institute of Technology, 6-6 Asahigaoka, Hino, Tokyo 191-0065, Japan
(E-mail: swan@astan1.tmit.ac.jp)
- 2 ウィーン工科大学熱流体力学研究所
Institute of Fluid Mechanics and Heat Transfer, Vienna University of Technology, Resselgasse 3, A-1040 Vienna, Austria

特に問題であるのは、数値解析から予測されている第一臨界レイノルズ数 Re_{c1} に相当する温度差が、熔融シリコンでは0.1 K のオーダーと、非現実的値となることである。このような低温度差条件を実現する方法として、自由表面の一部を酸化膜で覆う手法が有効であると考えられる。この方法で Cröll らはフローティングゾーン結晶成長実験⁵⁾において、振動流の発生条件を見積もることに成功している。これをハーフゾーンに応用することで、上下ディスク間は現実的な温度差のまま、自由表面間の温度差を小さく設定することが可能となる。筆者らは、この方法を適用した場合の、流れ場の構造や遷移臨界 Re などの特徴の変化を調べる目的で3次元数値シミュレーションを行った⁶⁾。結果として、軸対称定常流から3次元流れへの臨界 Re は、自由表面を局在化させる条件に強く依存し、特に、自由表面を高温ディスク側に設けた場合には、3次元定常状態を経ずに、軸対称流から振動流へ直接遷移する可能性があることが明らかとなった。このことから、異なる不安定性メカニズムが発生していることが示唆される。

90年代半ばの数値解析的研究により、低 Pr 流体での第一遷移における不安定性メカニズムは、軸対称流のトロイダルセルの中心に働く歪みに起因するとされてきた^{7,8)}。この不安定性は、現在では楕円型メカニズムの一種であると理解される⁹⁾。近年、Nienhüser and Kuhlmann によって、遠心力不安定性も第一遷移の不安定性メカニズムに寄与することが報告されている¹⁰⁾。楕円型不安定性は、軸対称流の流れ線の楕円性に起因することを考えると、自由表面を局在化することにより、遠心力不安定性とのバランスが変化することが予想される。

本研究では、自由表面を局在化したハーフゾーン液柱における温度差マランゴニ対流について、線形安定解析およびエネルギー解析を行い、軸対称定常流の不安定性メカニズム、特に楕円型不安定性と遠心力不安定性の寄与の変化を明らかにすることを目的とした。

2. 解析方法

2.1 数理モデル

解析対象のモデルを Fig. 1 に示す。密度 ρ 、動粘性係数 ν 、熱拡散率 α の非圧縮性 Newton 流体が、半径 a の上下ディスク間に保持され、高さ L の液柱を形成している。上下ディスクの温度は、それぞれ T_c , $T_h (> T_c)$ に保持され、 $\Delta T = T_h - T_c$ の温度差が与えられている。液柱側面は、長さ L_w の自由表面を残して、固体薄膜で覆われており、自由表面間の温度差を ΔT_w とする。この液柱モデルを部分自由表面型ハーフゾーン (Partially confined half-zone: 以下, PCHZ) と呼ぶことにする。高温ディスクの中心を原点とする円筒座標系 (r, φ, z) を導入し、自由表面の上下端部の z 座標を、それぞれ z_h, z_c とする。

微小重力環境における純マランゴニ対流を考え、液柱は真円柱形状を仮定する。液柱表面の静的・動的変形は本研

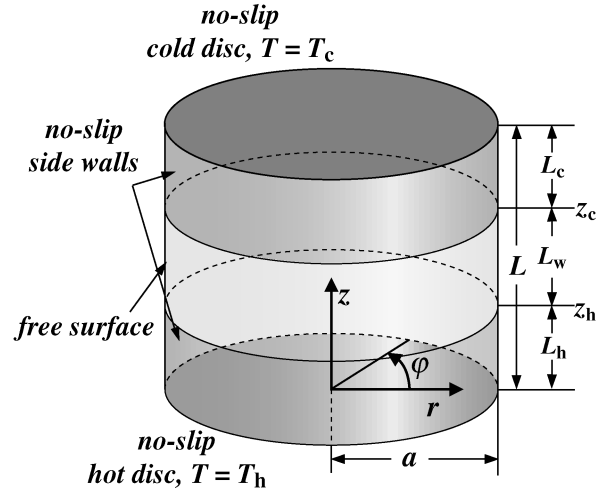


Fig. 1 Partially confined half-zone. Two parts of the free surface are covered with thin solid films.

究では考慮しない。多くの液体において、表面張力の温度依存性として以下の線形近似が成り立つ。

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0), \quad (1)$$

ここで、 T_0 は代表温度で、ここでは $(T_h + T_c)/2$ とする。 $\sigma_T = -\partial\sigma/\partial T|_{T=T_0}$ は、表面張力の温度係数である。一般的な液体では負の依存性となるため、定義に負号を導入した。また、 $\sigma_0 = \sigma(T_0)$ である。

液柱内の温度場、流れ場は、以下の基礎方程式、および境界条件により記述される。

基礎方程式：

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2a)$$

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{U}, \quad (2b)$$

$$\partial_t \Theta + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta = Pr^{-1} \nabla^2 \Theta, \quad (2c)$$

境界条件：

上下ディスク ($z=0, As$) において：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= 0 \\ \Theta &= \pm 0.5 \end{aligned} \right\}, \quad (3a)$$

側面固体膜 ($r=1, z \leq z_h, z_c \leq z$) において：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \Theta &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3b)$$

自由表面 ($r=1, z_h < z < z_c$) において：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} - Re \nabla_{\parallel} \Theta &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \Theta &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3c)$$

ここで、 $\mathbf{U} = (U, V, W)$ は速度、 P は圧力、 $\Theta = (T - T_0)/\Delta T$ は無次元温度である。 $\mathbf{S} = \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T$ は粘性応力テンソル、 $\mathbf{n}$ は自由表面に外向きの法線ベクトル、 $\nabla_{\parallel}$ は接

線方向勾配を表す演算子である。無次元化には、長さ、速度、温度、圧力、時間について、それぞれ $a, v/a, \Delta T, \rho v^2/a^2, a^2/v$ のスケールリングを用いている。これらの式中、および以降の節では (r, z) は無次元数として記述した。また、液柱半径 a を長さのスケールに用いていることに注意されたい。雰囲気流体は非粘性流体とし、簡単のため液柱側面では断熱を仮定する。式中に現れる無次元数は、レイノルズ数、プラントル数、アスペクト比で、

$$Re = \frac{\sigma_T \Delta T a}{\rho v^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad As = \frac{L}{a}. \quad (4)$$

である。マランゴニ数は $Ma = Pr Re$ に対応する。

次に PCHZ の幾何学条件を特徴付ける変数を導入する。全体の液柱高さに対する自由表面長さの割合として、自由表面率 ξ を以下のように定義する

$$\xi = \frac{L_w}{L}. \quad (5)$$

また、自由表面の軸方向位置も可変であるが、本研究では、以下の 3 通りの典型的な配置を考える。

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \langle \text{hot} \rangle : z_h = 0, z_c = \xi As, \\ \langle \text{center} \rangle : z_h = \frac{1}{2} As(1 - \xi), z_c = \frac{1}{2} As(1 + \xi), \\ \langle \text{cold} \rangle : z_h = \xi As, z_c = As \end{array} \right\}. \quad (6)$$

$\mathcal{P}$ は 3 要素から成る集合で、‘ $\langle \rangle$ ’ 内の語は自由表面の位置を意味する。

マランゴニ効果は開口部の自由表面上のみに働くため、一定の Re 条件においても ξ によって実質的な流れの駆動力が異なる。これを記述するために、以下のように、自由表面間の長さとして温度差を用いた、有効レイノルズ数 Re^w を導入する。

$$Re^w = \frac{\sigma_T \Delta T_w L_w}{\rho v^2} = As \xi \Delta \Theta_w Re, \quad (7)$$

ここで、 $\Delta \Theta_w$ は無次元化した自由表面間温度差： $\Theta(z_h) - \Theta(z_c)$ である。ただし、 $\Delta \Theta_w$ は対流熱輸送に依存するため、計算後にのみ決定される値であることに注意されたい。

2.2 基本流および線形安定性問題

軸対称定常状態を基本流とし、 U_0, P_0, Θ_0 と書くことにする。基本流の支配方程式は Eq. (2)–(3) において、 $\partial_t = \partial_\phi = V_0 = 0$ を適用することで得られる。これを、不等間隔スタッガード格子において 2 次中心差分で離散化し、得られた非線形連立方程式を、Newton-Raphson 法にて反復計算することで基本流場を得る。格子間隔は、上下ディスク付近、および自由表面と固体膜の接続部付近で密となるように生成した。後述の議論のため、流れ関数および渦度を以下のように導入しておく。

$$U_0 = \partial_z \Psi_0, \quad (8)$$

$$W_0 = - \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \Psi_0, \quad (9)$$

$$\Omega_0 = - \partial_r W_0 + \partial_z U_0 \quad (10)$$

等値線が流線と一致する Stokes の流れ関数は $\Psi_{\text{Stokes}} = r \Psi_0$ に対応する。

次に、この基本流の 3 次元微小擾乱に対する線形安定性を考える。擾乱成分を $\{\mathbf{u}', p', \Theta'\}$ と書いて、3 次元流れ場は以下のように記述される。

$$\begin{pmatrix} U(t, r, \phi, z) \\ P(t, r, \phi, z) \\ \Theta(t, r, \phi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(r, z) \\ P_0(r, z) \\ \Theta_0(r, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(t, r, \phi, z) \\ p'(t, r, \phi, z) \\ \Theta'(t, r, \phi, z) \end{pmatrix} \quad (11)$$

この式を Eq. (2) に代入し、微小擾乱について線形化することで、以下の線形化擾乱方程式を得る。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (12a)$$

$$\partial_t \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' = - \nabla p' + \nabla^2 \mathbf{u}', \quad (12b)$$

$$\partial_t \Theta' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \Theta_0 + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \Theta' = Pr^{-1} \nabla^2 \Theta'. \quad (12c)$$

これらの線形常微分方程式系の一般解は、規準モードの線形結合で表せる。規準モードの形は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}'(t, r, \phi, z) \\ p'(t, r, \phi, z) \\ \Theta'(t, r, \phi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}(r, z) \\ \hat{p}(r, z) \\ \hat{\Theta}(r, z) \end{pmatrix} \exp(\tilde{\lambda} t + i m \phi) + \text{c.c.}, \quad (13)$$

で与えられ、 $\tilde{\lambda} = \lambda + i\omega$ は時間成長率 λ および周波数 ω から成る複素成長率である。整数 m は周方向波数、c.c. は複素共役を表す。この規準モードに対する方程式に基本流の場合と同様の離散化を施すことで、一般化複素固有値問題に帰着される。

$$A \hat{\mathbf{x}} = \tilde{\lambda} B \hat{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

ここで、複素成長率 $\tilde{\lambda}$ は固有値として表現され、 $\hat{\mathbf{x}}$ は擾乱場の変数から成る固有ベクトルである。 A は正則行列であるが、 B は、境界条件および連続の式において時間微分の項が現れないため、非正則となり、固有値の一部は無限大となる。この無限大固有値は、Eq. (14) に前処理を施すことで、他の固有値を保ったまま、複素平面上の特定の点にマッピングすることができる¹¹⁾。

特定の波数 m に対する中立安定限界 Re_c^m は、成長率 λ がゼロとなる Re として得られる。この条件は、与えられた Re において、実部が最大となる固有値を逆反復法¹²⁾ を用いて計算する過程を繰り返すことで得られる。全ての波数に対して最小となる Re_c^m が臨界レイノルズ数 Re_c と決定される。

2.3 エネルギー解析

上述の方法で得られた臨界レイノルズ数 Re_c における擾乱場について、基本流とのエネルギー授受を考えること

で, 不安定性メカニズムを調べることが可能となる. Eq. (12b)に $\mathbf{u}'$ を乗じて, 領域全体に渡って積分することで, 以下の Reynolds-Orr 方程式が得られる.

$$\partial_t E_k = -D_k + M_z + M_\phi + I_v, \quad (15)$$

ここで, E_k は擾乱の運動エネルギー, D_k は粘性散逸, M_z および M_ϕ は自由表面におけるマランゴニ効果による仕事を表す. $I_v = \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 dV$ は基本流から擾乱に供給されるエネルギーである. この項は円筒座標系において, 以下のような成分に分解できる⁷⁾.

$$\begin{aligned} I_v &= \sum_i I_{vi} = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3} + I_{v4} + I_{v5} \\ &= - \int_V \left(v'^2 \frac{U_0}{r} + u'^2 \partial_r U_0 \right. \\ &\quad \left. + u' w' \partial_z U_0 + w' u' \partial_r W_0 + w'^2 \partial_z W_0 \right) dV \end{aligned} \quad (16)$$

これとは別に, 擾乱 $\mathbf{u}'$ を基本流の流線に平行な成分と垂直な成分に分解できる¹³⁾.

$$\mathbf{u}'_{\parallel} = \frac{(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{U}_0) \mathbf{U}_0}{U_0^2}, \quad \mathbf{u}'_{\perp} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}'_{\parallel}. \quad (17)$$

これを用いると, I_v 項を以下のように表せる.

$$\begin{aligned} I_v &= I'_v = \sum_i I'_{vi} = I'_{v1} + I'_{v2} + I'_{v3} + I'_{v4} \\ &= - \int_V \left[\mathbf{u}'_{\parallel} \cdot (\mathbf{u}'_{\parallel} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'_{\parallel} \cdot (\mathbf{u}'_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{u}'_{\perp} \cdot (\mathbf{u}'_{\parallel} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'_{\perp} \cdot (\mathbf{u}'_{\perp} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 \right] dV. \end{aligned} \quad (18)$$

以降では, Reynolds-Orr 方程式の各項は, 散逸 D_k で規格化したものを用いる. また, 後述の議論のため, 各被積分項を以下のように i_v にて表す.

$$I_{vi} = \int_V i_{vi} dV, \quad I'_{vi} = \int_V i'_{vi} dV. \quad (19)$$

エネルギー解析の計算においては, 各速度成分はスタッガード格子のスカラー量の定義点に補間した. 各微分量および積分の計算は, r, z 方向については2次中心差分, およびシンプソン則による数値積分を行った. ϕ 方向については, あらかじめ Eq. (13) から導出した, 解析的な式を用いた. 演算の効率化と記憶領域の節約のため, 全ての行列は CRS 形式で格納し, 連立方程式の求解には, 数値ライブラリ Intel MKL および線形ソルバー PARDISO を用いた.

計算コードの妥当性は, 複数の方法によって検証した. まず $\xi = 1.0$ において得られた臨界値 Re_c の値は, ハーフゾーンにおける既往の線形安定解析の結果^{7,14)} と 1% 以内で一致した. また, エネルギー解析における誤差 (Eq. (15) の残差) も全ての計算条件で 2% 以内に収まった. 本

論文における計算は, 全て $N_r \times N_z = 101 \times 141$ の格子サイズにて行った.

3. 軸対称定常流

3次元流れへの遷移臨界や不安定性メカニズムは, 基本流の性質によって決まるため, 軸対称流の特性を理解しておくことは重要である.

3.1 自由表面間の温度差

PHCZ の特性のひとつとして, 対流の実質的な駆動力となる自由表面間の温度差を制御変数とできない問題がある. 液柱全体に対する温度差のみが直接制御可能であるのに対し, 自由表面間の温度差は対流熱輸送に影響されるため, 流れ場と連成して決定される解の一部である. $Pr \rightarrow 0$ の極限, すなわち熱伝導支配場においてのみ, 自由表面間の温度差 ΔT_w は液柱全体の温度差 ΔT と線形関係 $\xi \Delta T$, 無次元表記では $\Delta \Theta_w = \xi$ となる. $Pr \neq 0$ においては, 実質的な温度差 ΔT_w は $\xi \Delta T$ から変動する. これを記述するために, 自由表面間温度差の線形分布からの相対偏差 ε を導入する.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \Theta_w - \Delta \Theta_w(Pr \rightarrow 0)}{\Delta \Theta_w(Pr \rightarrow 0)} = \frac{\Delta \Theta_w}{\xi} - 1 \quad (20)$$

したがって, $Pr \rightarrow 0$ における有効レイノルズ数は以下のように表せる.

$$Re_0^w = Re^w(Pr \rightarrow 0) = \frac{\sigma_T \Delta T_w(Pr \rightarrow 0) L_w}{\rho \nu^2} = As \xi^2 Re. \quad (21)$$

流れ場の方向を考えると, 液柱側面付近では一般的に温度が上昇する. したがって, 自由表面間の温度差は, $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$ の場合には線形分布よりも小さく, $\mathcal{P} = \langle \text{cold} \rangle$ の

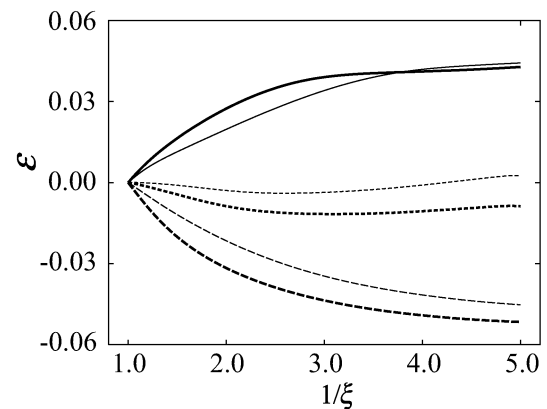


Fig. 2 Relative deviation of the temperature difference ε as a function of the inverse of the free surface fraction ξ^{-1} for $Pr = 0.01$ and $Re_0^w = 1000$. The line styles stand for the different geometry: The thick lines are for $As = 1.5$, and the thin lines for $As = 2.0$; The solid lines are for $\mathcal{P} = \langle \text{cold} \rangle$, dotted lines for $\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$, and the dashed lines for $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$.

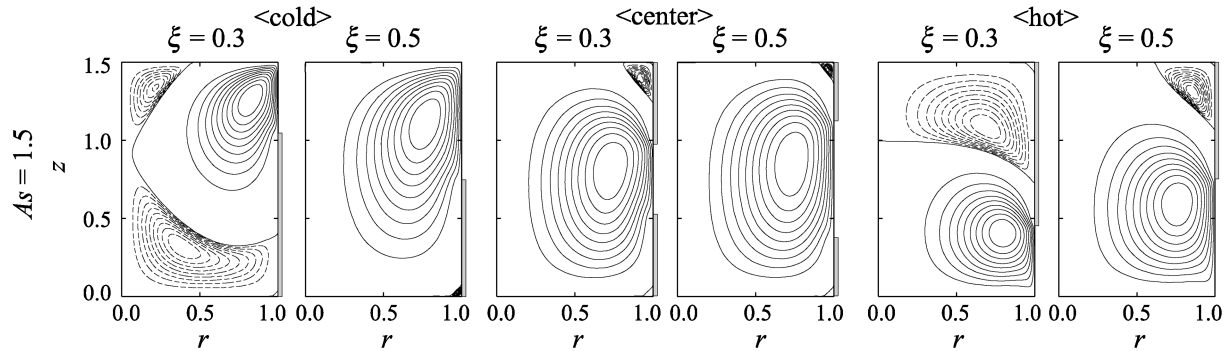


Fig. 3 Streamlines of the basic axisymmetric steady flow for $Pr=0.01$, $Re_w^w=1000$. Solid lines indicate positive and dotted lines indicate negative values of the Stokes stream function. The step size between neighboring contour lines is constant with $\Delta(r\Psi_0) = r\Psi_0^{\max}/10$ for positive values, and $\Delta(r\Psi_0) = r\Psi_0^{\min}/10$ for negative values. The values of $(r\Psi_0^{\max}, r\Psi_0^{\min})$ are: $(12.74, -3.80 \times 10^{-2})$, $(12.15, -1.34 \times 10^{-4})$, $(20.73, -5.22 \times 10^{-2})$, $(17.07, -5.30 \times 10^{-3})$, $(14.09, -2.73 \times 10^{-1})$, $(13.41, -4.30 \times 10^{-2})$, consecutively from left to right.

場合には大きくなる。Fig. 2 に、線形分布から近似した駆動力を一定 $Re_w^w=1000$ にした場合の相対偏差 ε を自由表面率の逆数の関数として示した。 $Pr=0.01$, $As=1.5$, 2.0 である。少なくともプロットした範囲内においては、偏差 ε の絶対値は、 ξ の減少に伴って単調に増加する。 $\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$ における変化は明確には記述し難い。少なくとも $\xi \rightarrow 1$ においては微係数がゼロに近づくことが分かる。 ε は ξ のみならず、 Re_w^w や Pr にも依存して変化する。本論文における計算条件の範囲内では、 $|\varepsilon|$ は20%以内であった。

以下の節においては、流れの駆動力は有効レイノルズ数 Re_w^w によって表すが、一定の駆動力における流れの特性を記述する際には Re_w^w を固定するものとする。

3.2 流れ場の構造

$Re_w^w=1000$, $Pr=0.01$, $As=1.5$ において、自由表面率 ξ , 自由表面位置 $\mathcal{P}$ を変化した場合の軸対称定常流の流れ場を Fig. 3 に示す。流れ関数が正の場合と負の場合で、等値線の刻み幅が異なることに注意されたい。流れ場の構造は自由表面で駆動される主セルに支配されているが、上下ディスクと固体膜から成るコーナー領域において2次渦の生成が見られる。低温ディスク側の固体膜に沿って、流れは急激に減速され、剥離が起こり、この領域で2次渦が発達しやすい。自由表面率が小さくなると、主セルの大きさは液柱の半径に比べてかなり小さくなり、低温ディスク上で流れの剥離が見られる。この逆流セル領域は高温ディスク側まで発達する場合がある ($\xi=0.3$, $\mathcal{P}=\langle \text{cold} \rangle$)。自由表面から離れた領域では、自由表面位置による変化が小さくなる事が分かる。

$Pr \rightarrow 0$, $Re_w^w=1000$ における流れ関数 $r\Psi_0$ の最大値を、 ξ^{-1} の関数として Fig. 4 に示す。ここでは $Pr \rightarrow 0$ を与えているため、3.1で論じた偏差は存在せず、流れ関数の違いは幾何学形状のみの影響による。一定の駆動力が与えられた場合、 $\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$ において最も流れの規模が大きくな

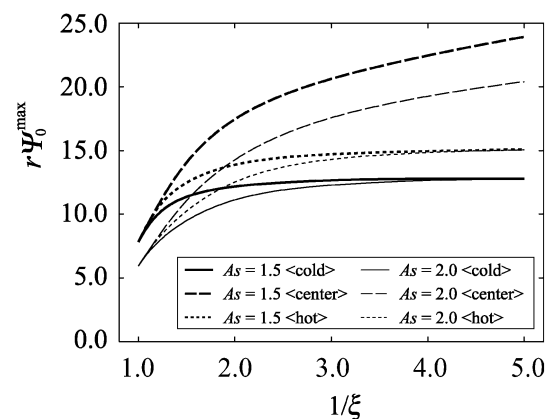


Fig. 4 Maximum values of the Stokes stream function $r\Psi_0$ as a function of the inverse of free surface fraction ξ^{-1} for several geometries. $Pr=0$, $Re_w^w=1000$.

ることが分かる。このことは、側面が固体膜に覆われた領域が存在することで、自由表面で駆動された流れが、より効果的に液柱内部へ発達できることを示している。

自由表面率を十分小さくした場合、主セルの形成される部分は、 $\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$ では依然として領域全体に発達するのに対し、 $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$, $\langle \text{cold} \rangle$ では自由表面のごく近傍のみに集中する。 $\xi \rightarrow 0$ の極限では、この局所的な渦の強さは自由表面における長さ L_w と温度差 ΔT_w のみで記述され、液柱全体の幾何学形状による効果は消滅すると考えられる。特性マランゴニ速度 $U = \sigma_T \Delta T_w / \rho v$ および自由表面の長さ L_w を考えると、 $O(1)$ のアスペクト比に対して、流れ関数 $r\Psi_0$ の漸近挙動として以下を得る。

$$r\Psi_0(\xi \rightarrow 0) = \frac{r\Psi_0^{\text{dim}}}{va} \sim \frac{UL_w a}{va} \sim \frac{\sigma_T \Delta T_w L_w}{\rho v^2} = Re_w^w \quad (22)$$

Eq. (22) は $Re_w^w = \text{const.}$ では一定値となる。 Fig. 4 に、この挙動が確認できる。

ハーフゾーンにおけるトロイダル状の主セルは渦輪と類似性があり、渦輪の曲率に起因した自己誘起歪みが不安定性の原因となるが、 $\xi \rightarrow 0$ の極限では、主セルの径に対する渦輪の径は無限大となり、この種の不安定性は消滅する。

4. 3次元擾乱に対する不安定性

本節では、軸対称定常流の線形安定限界、およびその不安定性メカニズムについて述べる。楕円型不安定性、遠心力不安定性など、よく知られている不安定性メカニズムは、単純な系においてのみ厳密に議論されており、複雑な系においては、これらの要素メカニズムが純粋な形で現れないこと、また同時に2つ以上のメカニズムが働く場合があることなどから、不安定性メカニズムの同定は困難となる。加えて、現時点では一般的な粘性流体における単純な安定判別法は存在しない。したがって、応用的な系における不安定性メカニズムは、擾乱のエネルギー授受を考えると、他の単純な流れにおける不安定性との類似性を見出すことで論じる以外に方法がない。

本研究においては、Reynolds-Orr 方程式におけるエネルギー輸送項 I_v の評価に基づいて、不安定性メカニズムを同定した。各座標系において分解した積分項 I_{vi} の分配量以外に、各項の被積分項の分布 i_{vi} も重要な意味を持つ。これに加え、非粘性流れにおける遠心力不安定性の判別条件を用いた。Sipp and Jacquin¹⁵⁾は、Bayly が2次元非粘性流れ全般に拡張した古典的な Rayleigh の判定条件を再構成し、以下の条件を満たす閉じた流線が存在する場合に、非粘性流れが遠心力不安定となることを示している。

$$\delta = \frac{|U_0| \Omega_0}{\mathcal{R}} < 0 \quad (23)$$

ここで、 U_0 , Ω_0 はそれぞれ、基本流の速度の絶対値および渦度、 $\mathcal{R}$ は流線の局所曲率半径である。この判定条件は、非粘性流れにおいてのみ成り立つが、粘性流れにおいても不安定性メカニズムを同定する材料として用いられている¹³⁾。

線形安定解析の計算においては、プラントル数は $Pr = 0.01$ に固定し、自由表面率は $1.0 \leq \xi^{-1} \leq 5.0$ の範囲で、 $1.0 \times 10^{-3} \leq \Delta \xi^{-1} \leq 5.0 \times 10^{-2}$ の刻みで変化させた。液柱全体のアスペクト比は $1.0 \leq As \leq 2.0$ の範囲 ($\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$) については $1.0 \leq As \leq 3.0$ で数種類を考えた。計算した線形安定限界を Fig. 5 に示す。安定限界は、周方向波数や不安定性モードの異なる複数の中立曲線から構成されており、各曲線の包絡線が臨界レイノルズ数 Re_c^w である。

結論から述べると、エネルギー解析の結果から、4つの異なる不安定性メカニズムが幾何学形状に依存して出現することが明らかとなった。各不安定モードは、遠心力不安定性（‘C’ と表記）、および楕円型不安定性（‘E’ と表記）

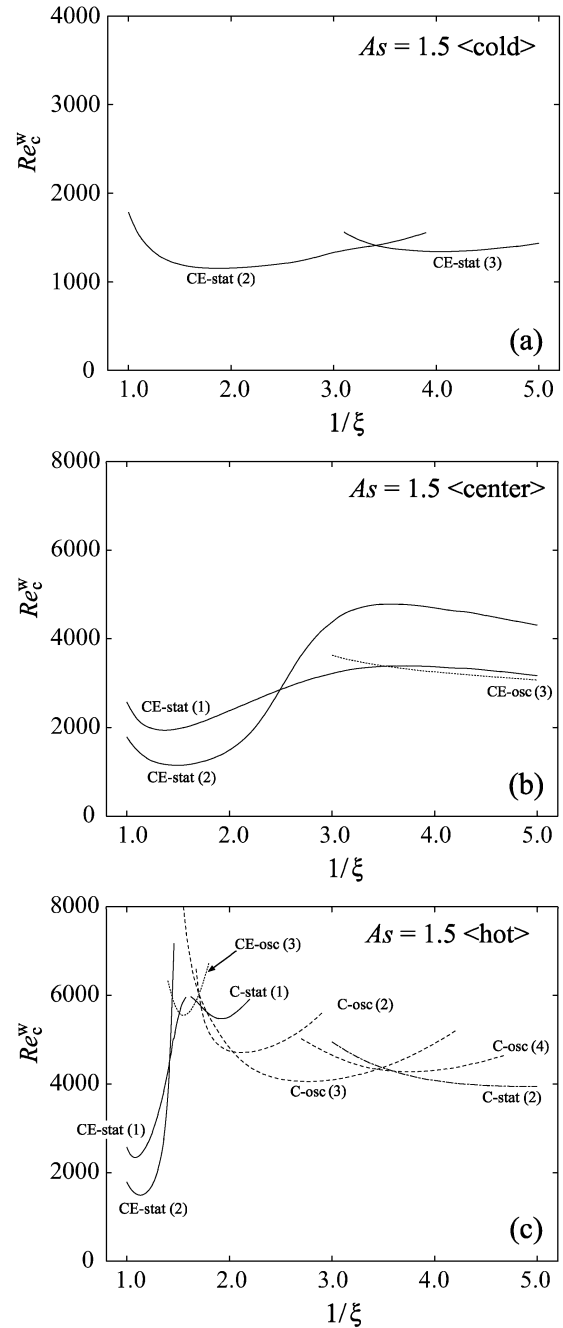


Fig. 5 Critical Reynolds numbers Re_c^w as functions of the inverse of free surface fraction ξ^{-1} for $As = 1.5$. (a): $\mathcal{P} = \langle \text{cold} \rangle$; (b): $\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$; (c): $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$. Prandtl number is kept constant as $Pr = 0.01$. Line styles and labels indicate different instability mechanisms (see the text for detail). The integer indicated in the bracket ‘(m)’ is azimuthal wave number.

の2つの要素メカニズムから構成される。略号 ‘stat’ は定常型擾乱、‘osc’ は振動型擾乱が不安定化することを意味する。

4.1 遠心力不安定性と楕円型不安定性

通常の低 Pr 流体のハーフゾーンにおける軸対称定常流

の不安定性には、楕円型不安定性および遠心力不安定性の両方が関与する¹⁰⁾。PCHZにおいては、この不安定性メカニズムは $\xi=1$ に近い形状パラメータ範囲で広く出現する。本研究では、この不安定性モードを‘CE-stat’と表記した。代表例として、 $As=1.5$, $\mathcal{P}=\langle\text{hot}\rangle$, $\xi^{-1}=1.20$ における不安定擾乱場の構造をFig. 6に示す。この条件では、 $Re_c^w=1567$ において、波数 $m=2$ の擾乱が最も不安定であった。

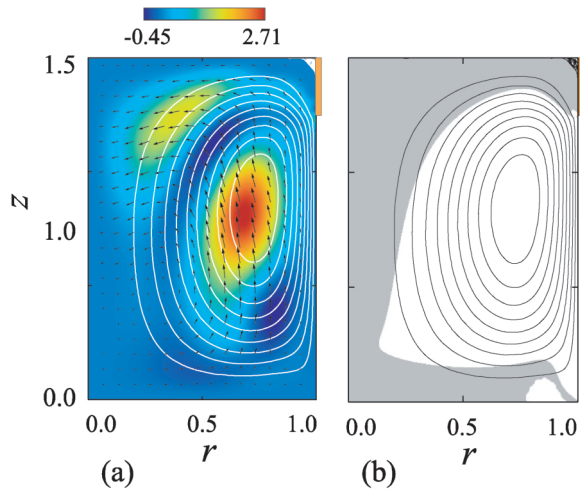


Fig. 6 Properties of the CE-stat mode. (a): Regions of strong energy production (color) together with critical disturbance velocity field (vectors) in a plane where the local term i_v takes its maximum; (b): regions for which $\delta < 0$ (shaded). The contour lines are the basic streamlines, and the orange bars indicate the wall-confined regions. $Pr=0.01$, $As=1.5$, $\mathcal{P}=\langle\text{hot}\rangle$, $\xi^{-1}=1.20$, $Re_c^w=1567$, $m=2$, and $\omega_c=0$.

Reynolds-Orr 方程式のエネルギー収支において支配的なのは I_{v4} もしくは I_{v2} である (Table 1). 局所項 $i_{v4} =$

Table 1 Critical values and energy budget for selected cases of the instability mode. Here ω_c corresponds to $2\pi a^2/\nu \cdot f_c^{\text{dim}}$. $Pr=0.01$, $As=1.5$, $\mathcal{P}=\langle\text{hot}\rangle$

Mode type		Energy budget			
CE-stat		i	I_{vi}	I'_{vi}	
ξ^{-1}	1.20	1	-0.032	0.178	M_z 0.003
Re_c^w	1567	2	0.156	0.720	M_ϕ -0.023
Re_c	1529	3	-0.241	0.059	$I_2^{\delta-} + I_3^{\delta-}$ 0.211
ω_c	0	4	0.904	0.072	$\Sigma I_{vi}^{\delta-}$ 0.211
m	2	5	0.243		
CE-osc		i	I_{vi}	I'_{vi}	
ξ^{-1}	1.55	1	0.147	0.144	M_z -0.003
Re_c^w	5550	2	0.031	0.599	M_ϕ -0.009
Re_c	10149	3	-0.186	0.067	$I_2^{\delta-} + I_3^{\delta-}$ 0.297
ω_c	629.2	4	0.960	0.209	$\Sigma I_{vi}^{\delta-}$ 0.385
m	3	5	0.067		
C-osc		i	I_{vi}	I'_{vi}	
ξ^{-1}	2.50	1	0.087	0.037	M_z 0.000
Re_c^w	4106	2	0.185	0.639	M_ϕ -0.004
Re_c	20200	3	0.251	0.226	$I_2^{\delta-} + I_3^{\delta-}$ 0.789
ω_c	341.1	4	0.234	0.107	$\Sigma I_{vi}^{\delta-}$ 0.869
m	3	5	0.252		
C-stat		i	I_{vi}	I'_{vi}	
ξ^{-1}	5.00	1	-0.097	0.137	M_z 0.012
Re_c^w	3940	2	0.073	0.655	M_ϕ -0.003
Re_c	80961	3	0.286	0.289	$I_2^{\delta-} + I_3^{\delta-}$ 0.860
ω_c	0	4	0.460	-0.081	$\Sigma I_{vi}^{\delta-}$ 0.953
m	2	5	0.278		

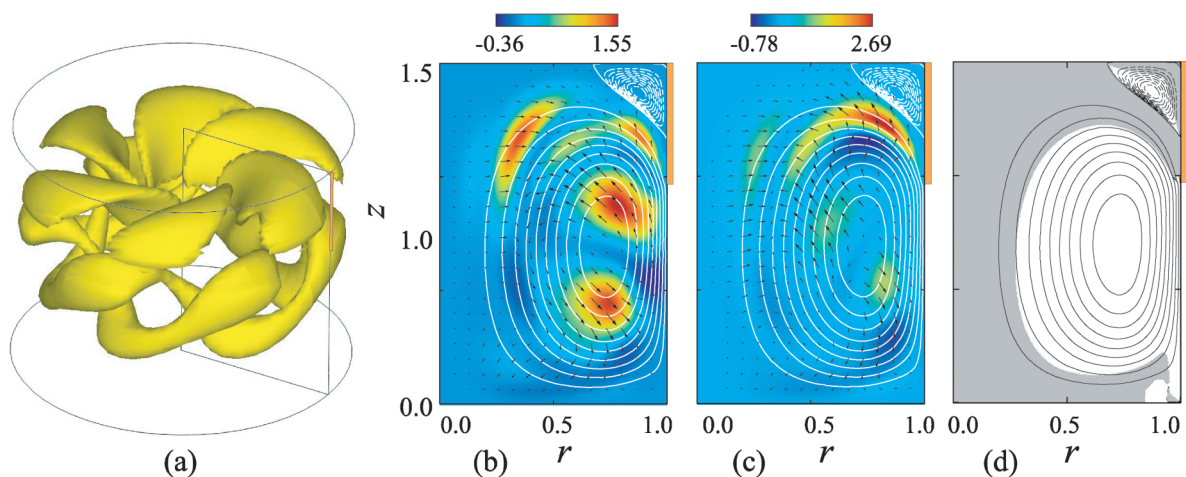


Fig. 7 Properties of the CE-osc mode. (a): Three-dimensional iso-surface of the local energy production $i_v=0.75$; (b): regions of strong energy production (color) together with critical disturbance velocity field (vectors) in a plane $\phi=\text{const.}$ in which the local production i_{v4} takes its maximum; (c) the same as (b) but in a plane $\phi=\text{const.}$ in which i_v takes maximum ($\Delta\phi=0.15\pi$ from the plane for (d)); (d): regions for which $\delta < 0$ (shaded). The contour lines are the basic streamlines, and the orange bars stand for the wall-confined regions. The parameters are $Pr=0.01$, $As=1.5$, $\mathcal{P}=\langle\text{hot}\rangle$, $\xi^{-1}=1.55$, $Re_c^w=5550$, $m=3$, and $\omega_c=629.2$.

$-w'u'\partial_z W_0$ は, 基本流の運動量 W_0 から, 半径方向擾乱 u' を介して, 軸方向擾乱 w' に供給されるエネルギーに相当する. 一方, 流線座標系における局所項 $i'_{v2} = -u' \cdot (u'_\perp \cdot \nabla) U_0$ は, 基本流の運動量から, 基本流に垂直な擾乱成分 $u'_\perp$ を介して基本流に平行な成分 $u'_\parallel$ へ供給されるエネルギーである.

Fig. 6 に示すように, 擾乱場において, エネルギー生成量の大きい領域が 2 箇所存在する. 一方の領域は, 基本流の主セル中心付近に位置している. Wanschura *et al.* による通常ハーフゾーンでのエネルギー解析から報告されているように⁷⁾, この部分での i_v の分布は, 分解項における i_{v4} で捉えることができる. さらに, Waleffe により述べられている, 擾乱の渦度場における楕円型不安定性の特徴¹⁶⁾がこの領域において確認された. これらの特性から, この領域での擾乱エネルギー生成は, 楕円型不安定性によるものと考えられる.

もうひとつのエネルギー生成は, 基本流の主セルの外側部分に沿った領域で発生している. この領域では, Eq. (23) が満たされており, 遠心力不安定性がこの領域での擾乱エネルギー生成のメカニズムと考えられる. Nienhüser and Kuhlmann¹⁰⁾ で述べられているように, この領域のエネルギー生成項は, 流線座標系に分解した項の $i'_{v2} + i'_{v3}$ の分布と非常に類似している. しかし, 矩形キャビティ内流れにおいては, 遠心力不安定, 楕円型不安定の双方において I'_{v2} 項のエネルギー分配が支配的になることがある¹³⁾. これは, 楕円型不安定性の影響が現れる I_{v4} 項と, I'_{v2} などの項とが別の座標系で分解され排他的でないため, I_{v4} によって計測されたエネルギー量が, I'_{v2} などの項にも含まれてしまうことが理由である. 楕円型不安定性を測るには, 流線座標系での分解は適当でないと考えられるため, エネルギー解析における積分領域を, Eq. (23) を基準にして以下のように分離する.

$$I_{vi}^{\delta-} = \int_V \mathcal{F}(\delta) \cdot i_{vi} dV, \quad \mathcal{F}(\delta) = \begin{cases} 1 & \delta < 0 \\ 0 & \delta \geq 0 \end{cases} \quad (24a)$$

$$I_{vi}^{\delta+} = I_{vi} - I_{vi}^{\delta-}. \quad (24b)$$

ここで $\mathcal{F}$ はフィルタの役割を果たす関数である. この方法で分解した $i_{v2}^{\delta-} + i_{v3}^{\delta-}$ の分布は, 外側流線領域でのエネルギー生成の分布をほぼ完全に捉えており, Table 1 に見られるように, 積分量 $I_{v2}^{\delta-} + I_{v3}^{\delta-}$ は全エネルギー生成 $\Sigma I_{vi}^{\delta-}$ とほぼ同等になっている. この方法により, 擾乱エネルギー生成における, 遠心力不安定性の寄与を定量化することが可能となった.

このような擾乱場が成長するためには, 不安定化メカニズムにより増幅された流れが, 再び不安定化メカニズムを促進するようなフィードバック機構が存在する必要がある. これは, 例えば $-w'u'\partial_z W_0$ においては, 増幅された w' からエネルギー輸送を担う u' へのフィードバックである. 閉領域流れにおいては, このフィードバックは, 流れ

場の連続性, もしくは自立的な機構 (例えば $-w'u'\partial_z W_0$) により自然に構成される. しかし, 2 種類以上の要素メカニズムが関与している場合には, これらのメカニズム同士の相互増幅機構によってもフィードバックが構成される. すなわち, 一方のメカニズムにより増幅された擾乱が, もう一方のメカニズムでの輸送項の増幅に寄与する場合がある. CE-stat モードにおいては, 楕円型不安定性および遠心力不安定性によるエネルギー生成のピークは, 同一の φ 面内に位置しており, 楕円型不安定のメカニズムにより増幅された擾乱流れは, 遠心力不安定を促進する方向に流れている. また, $\Delta\varphi = \pi/m$ の周期で, 逆の相互増幅が起こる.

$\mathcal{P} = \langle \text{cold} \rangle$ においては, CE-stat モードは全ての ξ 範囲において, 最も不安定となった. Nienhüser and Kuhlmann による通常ハーフゾーンにおける線形安定解析では, 液柱のアスペクト比を広範囲に変化させたり, 自由表面の静的変形を考慮した場合でも, 不安定性メカニズムは常に CE-stat 型であった¹⁰⁾. このことから, CE-stat 不安定性, すなわち, 通常ハーフゾーンにおける不安定性メカニズムには, 自由表面と低温ディスクが接続していることが幾何学的要件であると考えられる.

Table 2 Ranges of the inverse of the free surface fraction ξ^{-1} in which the different instability modes take place (Corresponding to the critical branches in Fig. 5(c)). $Pr = 0.01$, $As = 1.5$, $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$

range of ξ^{-1}	mode type	m
1.0 ~ 1.417	CE-stat	2
1.417 ~ 1.512	CE-stat	1
1.512 ~ 1.672	CE-osc	3
1.672 ~ 1.720	C-stat	1
1.720 ~ 2.029	C-osc	2
2.029 ~ 3.446	C-osc	3
3.446 ~ 3.599	C-osc	4
3.599 ~ 5.0	C-stat	2

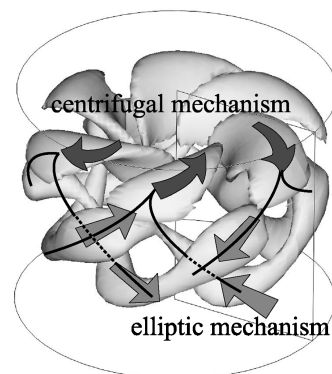


Fig. 8 Schematic structure of the disturbance flow in CE-osc mode.

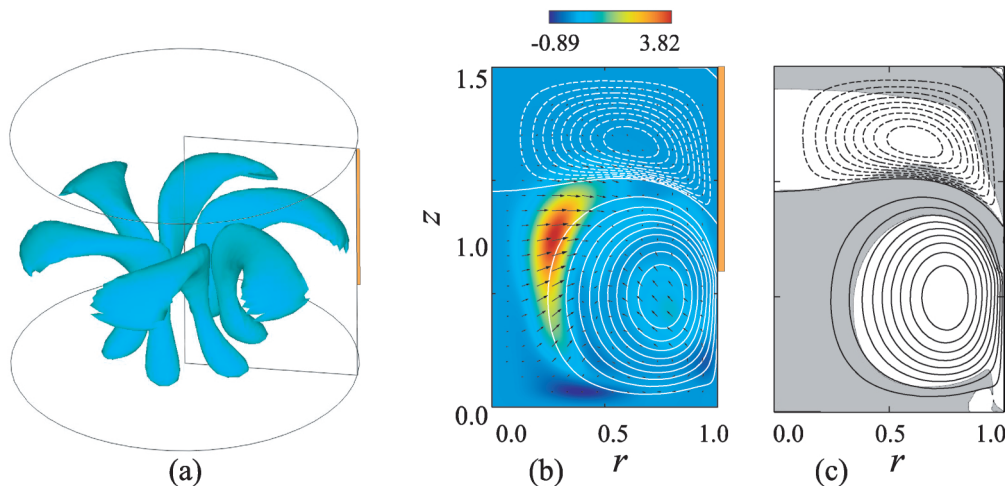


Fig. 9 Properties of the C-osc mode. (a): Three-dimensional iso-surface of the local energy production $i_v = 1.50$; (b): regions of strong energy production (color) together with critical disturbance velocity field (vectors) in a plane $\varphi = \text{const.}$ in which the local production i_v takes its maximum; (c): regions for which $\delta < 0$ (shaded). The contour lines are the basic streamlines, and the orange bars stand for the wall-confined regions. $Pr = 0.01$, $As = 1.5$, $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$, $\xi^{-1} = 2.50$, $Re_c^w = 4106$, $m = 3$, and $\omega_c = 341.1$.

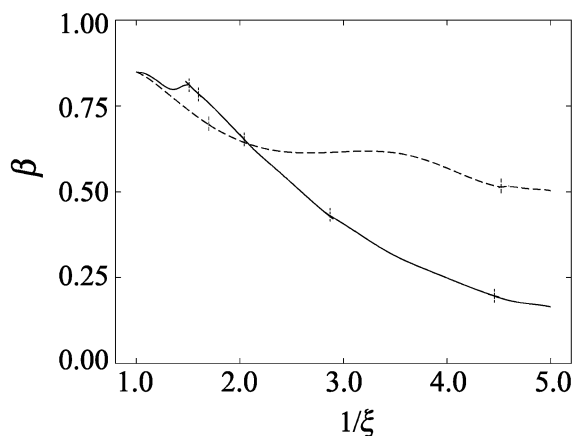


Fig. 10 Streamline eccentricity parameter β in the center of the basic vortex along the critical Reynolds number Re_c^w for $Pr = 0.01$, $As = 2.0$, $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$ (solid line), $\mathcal{P} = \langle \text{cold} \rangle$ (dashed line). The small vertical partition bars indicate a change of the critical mode.

4.2 2種類の振動型不安定モード

$\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$, $\langle \text{hot} \rangle$ の場合は, ξ の変化と共に, CE-stat 以外の擾乱モードが不安定となる場合がある. **Table 2** に, $As = 1.5$, $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$ において同定された不安定モードと ξ^{-1} の範囲を示す. 低 Pr 流体の通常ハーフゾーンでは見られない, 2つの振動型不安定モードが発生することに注目されたい.

2つの振動モードのうち1つは, $1.512 \leq \xi^{-1} \leq 1.672$ の範囲で出現する, CE-osc と表記したモードである. 代表例として, $\xi^{-1} = 1.55$ を考える. この条件では, $Re_c^w = 5550$ において, 波数 $m = 3$, 周波数 $\omega_c = 629.2$ の振動型擾乱が最も不安定であった. **Fig. 7** に, 擾乱場およびエネルギー生成項の分布を示す. 擾乱エネルギー生成の大きい領域は,

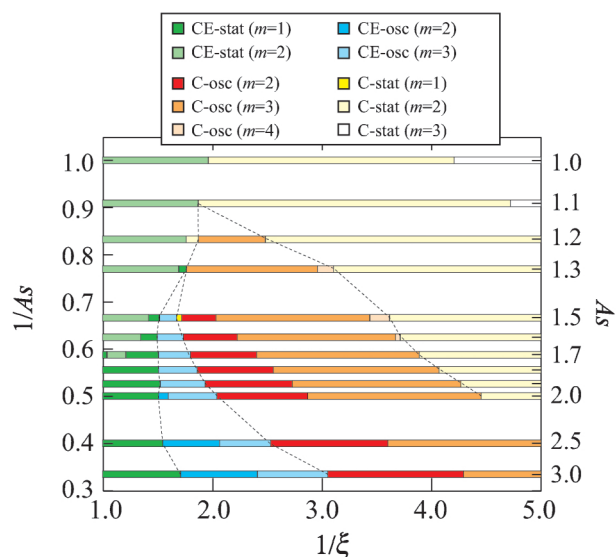


Fig. 11 Map of the critical mode in the (ξ^{-1}, As^{-1}) -plane for $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$. Colors indicate different instability mechanisms and azimuthal wave numbers.

3つの領域に分かれている. 基本流の主セルの外側領域でのエネルギー生成は, 4.1で述べたのと同様の理由から, 遠心力不安定性によるものと考えられる. $I_{v2}^{\delta-} + I_{v3}^{\delta-}$ へのエネルギー分配に見られるように, CE-stat モードよりも, 遠心力不安定性の寄与が大きい. 一方, 基本流の主セル付近での, 螺旋状に絡まった $\Sigma_{i v_i}$ の分布 (**Fig. 7(a)**) は, i_{v4} によって代表できることから, 楕円型不安定性によるものと考えられる.

Fig. 8 に, このモードにおける擾乱流れの構造を模式的に示す. 一定の $\varphi = \text{const.}$ 平面では, 楕円型不安定によるエネルギー生成の領域が2箇所存在するが, それぞれの領

域における擾乱速度は、 r - z 面内では互いに逆向き、周方向には同じ向きとなっている。これらの流れの方向は、 $\Delta\varphi = \pi/m$ 周期で、周方向に交互に逆転する。遠心力不安定性によるエネルギー生成のピークは、楕円型不安定のピーク位置から半周期ずれて現れる。相互増幅によるフィードバックメカニズムは、2つの隣り合った楕円型不安定領域で増幅された擾乱が、ひとつの遠心力不安定を促進するように流れることで構成されている。

さらに自由表面率を減少させると、 $1.720 \leq \xi^{-1} \leq 3.599$ の範囲で、C-osc と表記した振動型モードが不安定となる。この範囲で3種類の周方向波数 m が臨界曲線に関わる。代表例として、 $\xi^{-1} = 2.50$ における不安定擾乱場の構造を Fig. 9 に示す。この条件では、 $Re_c^w = 4106$ において、波数 $m = 2$ 、周波数 $\omega_c = 341.1$ の振動型擾乱が最も不安定となる。このモードでは、楕円型不安定性の寄与はわずかに確認できるのみである。エネルギー生成項の等値面 (Fig. 9) を見ると、自由表面付近から広範囲に分布する、遠心力不安定性による紐状の擾乱エネルギー生成領域が目立つ。さらに、エネルギー生成項のうち、Eq. (24) により分離した積分項 $I_{v2}^{\delta-} + I_{v3}^{\delta-}$ への分配が支配的であることから、不安定性メカニズムにおいては遠心力不安定性が支配的であると結論できる。この、広範囲に分布する遠心力不安定領域は、矩形キャビティ流れにおいても見られ、同様に振動型不安定性が起こることが報告されている¹⁷⁾。

4.3 楕円型不安定性の減退

$\mathcal{P} = \langle \text{center} \rangle$, $\langle \text{hot} \rangle$ においては、自由表面を局在化することで、低温ディスク付近の急激な流線曲率が緩和され、基本流の主セル中心の形状は ξ の減少に伴って真円形状に近づく。この特性により、楕円型不安定性の要因が減少し、相対的に遠心力不安定性の寄与が大きくなることになる。遠心力不安定性の寄与の変化は、Table 1 中の $I_{v2}^{\delta-} + I_{v3}^{\delta-}$ へのエネルギー分配の変化に明確に現れている。楕円型不安定性の影響が減少することは、基本流の流線の離心率を調べることで説明できる。Landman and Saffman¹⁸⁾に従って、離心率を以下のように定義する。

$$\beta = \frac{2\varepsilon_0}{\Omega_0} \quad (25)$$

ここで、 ε_0 は基本流の最大ひずみ速度、 Ω_0 は角速度である。Fig. 10に、基本流の主セル中心 ($\Psi_{\text{Stokes}} = \Psi_{\text{Stokes}}^{\text{max}}$ となる位置) で測った β を、自由表面率の関数として示した。 $\mathcal{P} = \langle \text{cold} \rangle$ の場合には、強い依存性は認められないのに対し、 $\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$ の場合には、 ξ の減少と共に、明らかに β が小さくなっていくことが分かる。

楕円型不安定性の寄与が減少し、遠心力不安定とのバランスが変化することで、上述したような振動型不安定モードが現れる。自由表面率を十分に小さくした場合には、新たな定常型モード C-stat が最も不安定となる。このモードにおいては、楕円型不安定性の寄与は全く認められず、

不安定性メカニズムは純粋な遠心力不安定によるものと考えられる。

$\mathcal{P} = \langle \text{hot} \rangle$ において、全ての計算条件で同定した不安定モードを Fig. 11にまとめた。不安定性メカニズムの差異は色によって区別し、各色におけるグラデーションで、周方向波数の違いを表した。振動型不安定モードは、液柱全体のアスペクト比が大きい場合にのみ出現することが分かる。また、C-osc および C-stat モードが最も不安定となる ξ の範囲は、 As の減少に伴って ξ^{-1} 軸で左側にシフトしている。

液柱全体のアスペクト比が小さな液柱では、基本流の流線は局在化を施す以前から真円に近い。純粋な遠心力不安定モード C-stat が早めに出現すると考えられる。上述した2つの振動型不安定モードは、自由表面の局在化により楕円型不安定性の寄与が減少していく過程で現れるが、 As が大きい液柱ほど、流線形状の特性が変化しやすく、これらの振動モードが出現する領域が広いと考えられる。

5. 結 言

低 Pr 流体のハーフゾーン液柱内温度差マランゴニ対流の不安定性メカニズムにおける、自由表面の局在化の影響を明らかにする目的で、線形安定解析、およびエネルギー解析を実施した。Reynolds-Orr 方程式を用いたエネルギー解析の結果から、少なくとも4種類の異なる不安定性モードが出現することが分かった。このうち2つのモードは、通常のハーフゾーンでは見られない振動型の不安定モードである。全ての不安定モードは、楕円型不安定性もしくは遠心力不安定性の要素メカニズムにより構成されている。

自由表面の局在化により、軸対称定常流の構造が大きく変化し、特に自由表面を高温ディスク側に設けた場合には、低温ディスク付近での流線の曲率が緩和される。この性質は、楕円型不安定性の寄与の減少、結果的に遠心力不安定性の顕在化を引き起こし、異なる不安定モードが出現する要因となる。自由表面を低温ディスク側に設けた場合には、不安定性メカニズムが変化せず、かつ安定限界 Re_c^w の変動が少ない。このことから、自由表面と低温ディスクが接続されている限り、PCHZ モデルは、低 Pr 流体のハーフゾーンにおける低 Re 流れの実験において通常ハーフゾーンの代替として有効であり、今後の実験的研究への適用が望まれる。

謝辞

本研究の一部は、財団法人加藤科学振興会、ならびに文部科学省科学研究費補助金 (基盤研究 B : No. 16360377, 特別研究員奨励費 : No. 17-2377) の援助を受けて行われたものである。本研究における数値計算は、ウィーン工科大学情報技術センター (Information Technology Services, Vienna University of Technology) の PHOENIX にて実施し

たものであり、記して深謝を表する。

参考文献

- 1) R. Rupp, G. Müller and G. Neumann: J. Crystal Growth, **97** (1989) 34.
- 2) S. Nakamura, T. Hibiya, K. Kakimoto, N. Imaishi, S. Nishizawa, A. Hirata, K. Mukai, S. Yoda and T. Morita: J. Crystal Growth, **186** (1998) 85.
- 3) K. Takagi, M. Otaka, H. Natsui, T. Arai, S. Yoda, Z. Yuan, K. Mukai, S. Yasuhiro and N. Imaishi: J. Crystal Growth, **233** (2001) 399.
- 4) Satoshi Matsumoto, Hitoshi Hayashida, Shinichi Yoda, Atsuki Komiya, Hidesada Natsui and Nobuyuki Imaishi: Thermal Sci. Eng., **12**(4) (2004) 21.
- 5) A. Cröll, W. Müller-Sebert, K. W. Benz and R. Nitsche: Microgravity Sci. Technol., **3**(4) (1991) 204.
- 6) Suguru Shiratori, Shouichi Yasuhiro and Taketoshi Hibiya: J. Crystal Growth, **266** (2004) 145.
- 7) M. Wanschura, V. M. Shevtsova, H. C. Kuhlmann and H. J. Rath: Phys. Fluids, **7**(5) (1995) 912.
- 8) M. Levenstam and G. Amberg: J. Fluid Mech., **297** (1995) 357.
- 9) Richard R. Kerswell: Annu. Rev. Fluid Mech., **34** (2002) 83.
- 10) Ch. Nienhüser and H. C. Kuhlmann: J. Fluid Mech., **458** (2002) 35.
- 11) Dimitrios A. Goussis and Arne J. Pearlstein: J. Comp. Phys., **84** (1989) 242.
- 12) H. G. Golub and C. F. van Loan: *Matrix Computations*, pages 386?387. Johns Hopkins University Press, 1996.
- 13) S. Albensoeder and H. C. Kuhlmann: J. Fluid Mech, **458** (2002) 153.
- 14) V. Shevtsova: J. Crystal Growth, **280** (2005) 632.
- 15) D. Sipp and L. Jacquin: Phys. Fluids, **12** (2000) 1740.
- 16) Fabian Waleffe: Phys. Fluids, **A2** (1990) 76.
- 17) S. Albensoeder, H. C. Kuhlmann and H. J. Rath: Phys. Fluids, **13** (2001) 121.
- 18) M. J. Landman and P. G. Saffman: Phys. Fluids, **30**(8) (1987) 2339.

(2006年7月14日受理, 2006年9月4日採録)